

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

В. Г. Колобродов

Г. С. Тимчик

Дифракційна теорія оптичних систем

Підручник

*Затверджено Міністерством освіти і науки України
як підручник для студентів вищих навчальних закладів,
які навчаються за напрямом підготовки «Опtotехніка»*

Київ
НТУУ «КПІ»
2011

УДК 681.758(075.8)
ББК 22.343.4я73
К61

*Гриф надано Міністерством освіти і науки України
(Лист № 1/11-10713 від 23.11.2010 р.)*

Рецензенти:

Л. В. Поперенко, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

О. В. Ангельський, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

А. П. Поліщук, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
Національний авіаційний університет України

Відповідальний редактор

І. Г. Чиж, д-р техн. наук, проф.,
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Колобродов В. Г.

К61 Дифракційна теорія оптичних систем [Текст] : підруч. /
В. Г. Колобродов, Г. С. Тимчик. – К.: НТУУ «КПІ», 2011. – 140 с. –
100 пр.

ISBN 978-966-622-415-9

Викладено теоретичні основи дифракційного аналізу когерентних і некогерентних оптичних систем обробки інформації. Подано на основі рівнянь Максвелла властивості оптичного випромінювання, основи скалярної теорії дифракції, дифракційний аналіз оптичних систем і просторово-частотний аналіз дифракційно обмежених оптичних систем. Практичне застосування скалярної теорії дифракції знайшло відображення в представлених методах розрахунку параметрів світлового поля, яке формує когерентна або некогерентна система. Для практичного засвоєння матеріалу значну увагу приділено розв'язанню прикладів, пов'язаних з перетворенням електромагнітного поля в оптичних системах.

Для магістрів за напрямом «Опtotехніка», спеціальностями оптичні прилади і системи, фотоніка, лазерна та оптоелектронна техніка. Може бути корисним розробникам оптичних систем різного призначення.

**УДК 681.758(075.8)
ББК 22.343.4я73**

ISBN 978-966-622-415-9

© В. Г. Колобродов,
Г. С. Тимчик, 2011
© НТУУ «КПІ» (ПБФ), 2011

ЗМІСТ

Зміст	3
Скорочення	6
Вступ	7
Розділ 1. Основні властивості оптичного випромінювання	9
1.1. Рівняння Максвелла.....	9
1.2. Хвильове рівняння.....	11
1.3. Плоскі й сферичні монохроматичні хвилі.....	12
1.4. Скалярні гармонічні хвилі. Рівняння Гельмгольца.....	15
1.5. Рівняння ейконалу й перенесення.....	16
1.6. Кутовий спектр плоских хвиль.....	17
1.7. Приклади розрахунку параметрів електромагнітного поля.....	19
1.8. Задачі для самостійного розв'язання.....	25
Розділ 2. Основи скалярної теорії дифракції	28
2.1. Загальні положення теорії дифракції.....	28
2.2. Принцип Гюйгенса–Френеля.....	29
2.3. Зонна пластинка Френеля.....	34
2.4. Теорія дифракції Кірхгофа.....	37
2.4.1. Інтегральна теорема Гельмгольца–Кірхгофа.....	37
2.4.2. Дифракція на плоскому екрані.....	39
2.5. Дифракція Френеля.....	41
2.6. Дифракція Фраунгофера.....	44
2.7. Приклади розрахунку дифракції Фраунгофера.....	45
2.7.1. Прямокутний отвір.....	45
2.7.2. Круглий отвір.....	47
2.7.3. Синусоїдальна дифракційна ґратка.....	51
2.8. Дифракція Френеля на прямокутному отворі.....	54

2.9. Приклади розрахунку дифракційних картин.....	57
2.10. Задачі для самостійного розв'язання.....	65
Розділ 3. Дифракційний аналіз оптичних систем.....	73
3.1. Тонка лінза як елемент, що виконує фазове перетворення.....	73
3.2. Лінза як елемент, що виконує перетворення Фур'є.....	78
3.2.1. Поширення монохроматичного випромінювання через оптичну систему.....	78
3.2.2. Розподіл світлового поля у площині аналізу, коли транспарант встановлено перед лінзою.....	81
3.2.3. Розподіл світлового поля у площині аналізу, коли транспарант встановлено за лінзою.....	85
3.3. Дифракційна теорія формування зображення тонкою додатною лінзою.....	87
3.3.1. Функція розсіювання тонкої додатної лінзи.....	87
3.3.2. Функція розсіювання додатної лінзи у площині геометричного зображення.....	90
3.3.3. Зв'язок між амплітудами поля у площині зображення і площині предмета.....	91
3.4. Приклади розрахунку розподілу світлового поля в оптичних системах.....	94
3.5. Задачі для самостійного розв'язання.....	101
Розділ 4. Частотний аналіз дифракційно обмежених оптичних систем.....	107
4.1. Узагальнена модель оптичної системи, яка формує зображення.....	107
4.2. Когерентні й некогерентні оптичні системи.....	109
4.2.1. Когерентне випромінювання.....	110
4.2.2. Вимірювання міри когерентності випромінювання.....	113
4.2.3. Некогерентне випромінювання.....	115

4.3. Дифракційно обмежена когерентна оптична система.....	116
4.4. Дифракційно обмежена некогерентна оптична система.....	119
4.4.1. Оптична передавальна функція та її основні властивості.....	119
4.4.2. Зв'язок оптичної передавальної функції з фізичними параметрами оптичної системи.....	120
4.5. Приклади розрахунку передавальних функцій оптичних систем.....	126
4.6. Задачі для самостійного розв'язання.....	131
Список літератури.....	146

СКОРОЧЕННЯ

ДЛ	Дифракційна лінза
ДОЕ	Дифракційний оптичний елемент
КПФ	Когерентна передавальна функція
МПФ	Модуляційна передавальна функція
ОПФ	Оптична передавальна функція
ФРТ	Функція розсіювання точки

ВСТУП

Світло – це електромагнітні хвилі з довжиною у межах від 1 нм до 1 мм, тому під час проходження світла через оптичні елементи його слід розглядати не як сукупність променів, а як хвильовий фронт, який змінюється у просторі й часі. Поширення електромагнітної хвилі розглядають з позиції дифракції світла. *Дифракція світла* у вузькому (найбільш вживаному) розумінні – явище обгинання променями світла контура непрозорих тіл і, як наслідок, проникнення світла в область геометричної тіні. У широкому розумінні дифракція – це прояв хвильових властивостей світла в умовах, близьких до умов застосування положень геометричної оптики [1]. На основі такого уявлення про світло розробляють нові методи розрахунку оптичних систем, а також методи проектування принципово нових засобів оброблення інформації.

Першу елементарну кількісну теорію дифракції світла розвинув французький фізик О. Френель (1816), який пояснив її як результат інтерференції вторинних хвиль на основі принципу Гюйгенса–Френеля. Ідеї Френеля у математиці втілив німецький фізик Г. Кірхгоф (1882).

Головна перевага оптичних методів оброблення інформації – швидкодія і простота реалізації. Оброблення інформації в оптичних системах здійснюється із швидкістю світла й обмежується швидкодією пристроїв введення й виведення даних. В електронних пристроях, зокрема комп'ютерах, оброблення інформації відбувається у вигляді зміни в часі електричної напруги або струму, тобто у вигляді одновимірної функції. В оптичних системах перетворюються амплітуда і фаза (для когерентних систем) або інтенсивність (для некогерентних систем) світлового поля, які змінюються у просторі й часі. Це означає, що оброблення інформації здійснюється у вигляді багатовимірних функцій. У зв'язку з цим потенційні можливості оптичних систем оброблення інформації значно ширші за можливості електронних систем.

Крім того, в оптичних системах оброблення інформації порівняно просто реалізуються такі операції, як перетворення Фур'є, просторова фільтрація, низка інтегральних перетворень (кореляція, згортка, перетворення Гільберта, Лапласа та ін).

Під час проходження світла через елементи оптичної системи відбувається деформація хвильового фронту у часі і просторі. На основі аналізу цих деформацій можна якісно та точно оцінити вплив різних факторів на процеси перенесення інформації в оптичній або оптично-електронній системах. Також це дозволяє розробити принципово нові засоби оброблення інформації й суттєво вдосконалити безпосередньо оптичні елементи.

Теоретичним фундаментом оптичного оброблення інформації є дифракційна теорія оптичних систем – основа цього підручника. Практичне застосування дифракції світла відображене у розробленні методів розрахунку параметрів світлового поля, яке формує когерентна або некогерентна система.

Підручник написано на основі курсу лекцій «Дифракційна теорія оптичних систем», який викладають у Національному технічному університеті України «Київський політехнічний інститут» для магістрів напрямку «Оптотехніка» зі спеціальності «Лазерна та оптоелектронна техніка».

РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ОПТИЧНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ

1.1. Рівняння Максвелла

У хвильовій оптиці світло являє собою електромагнітне поле, яке змінюється у часі і просторі. *Оптичним випромінюванням* називають електромагнітні хвилі з довжиною λ від 1 нм (10^{-9} м) до 1 мм (10^{-3} м) [1]. Згідно з міжнародним стандартом DIN 5031, В1.7 світло у широкому розумінні має довжину хвилі від 100 нм до 1 мм, а видиме випромінювання або світло у вузькому розумінні охоплює спектральний діапазон від 380 до 780 нм.

В основу електромагнітної теорії світла покладено систему рівнянь Максвелла, яка встановлює зв'язок між напруженістю електричного $\vec{E}(x, y, z, t)$ і магнітного $\vec{H}(x, y, z, t)$ полів та їх індукціями $\vec{D}(x, y, z, t)$ і $\vec{B}(x, y, z, t)$. Електричні та магнітні властивості середовища характеризуються діелектричною ϵ та магнітною μ проникністю і питомою електричною провідністю σ .

Указані чотири вектори електромагнітного поля пов'язані між собою рівняннями Максвелла, які виконуються у кожній точці, де фізичні властивості середовища неперервні. Повна система рівнянь Максвелла в диференціальній формі має вигляд

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (1.1)$$

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad (1.2)$$

$$\text{div}\vec{D} = \rho; \quad (1.3)$$

$$\text{div}\vec{B} = 0, \quad (1.4)$$

де $\vec{j}(x, y, z, t)$ – щільність струму провідності.

Щоб за заданого розподілу зарядів за допомогою рівнянь Максвелла визначити вектори електромагнітного поля, систему рівнянь допов-

нують матеріальними рівняннями, які враховують реакцію середовища на зовнішнє електромагнітне поле. Для ізотропного середовища ці рівняння мають вигляд

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}; \quad \vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (1.5)$$

де ϵ_0 , μ_0 – електрична і магнітна сталі, $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} \cdot \text{м}^{-1}$; $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Гн} \cdot \text{м}^{-1}$.

Перші два матеріальні рівняння (1.5) пов'язують напруженість та індукцію електричного і магнітного полів, а третє рівняння – це закон Ома в диференціальній формі.

Перше рівняння являє собою узагальнений закон електромагнітної індукції Фарадея: зміна магнітного поля у часі викликає появу електричного поля, причому електричне поле існує незалежно від наявності в ньому провідника. Знак «–» у рівнянні (1.1) означає, що електричне поле намагається компенсувати магнітне поле, яке його викликало.

Рівняння (1.2) означає, що магнітне поле утворюється за рахунок зміни у часі електричного поля та електричного струму.

Рівняння (1.3) означає, що електричне поле утворюється зарядами, на яких починаються і закінчуються силові лінії поля.

Рівняння (1.4) свідчить про те, що немає магнітних зарядів, а силові лінії магнітного поля замкнені.

Оптичні середовища є діелектриками, для яких $\sigma = 0$, $\mu = 1$, $\vec{j} = 0$. На межі двох діелектриків значення параметра ϵ змінюється дискретно. Для аналізу процесу поширення оптичного випромінювання через межу двох діелектриків використовують граничні умови, які пов'язують тангенціальні проекції векторів електромагнітного поля на межі двох середовищ:

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}; \quad H_{\tau 1} = H_{\tau 2}. \quad (1.6)$$

Умови (1.6) використовують для визначення зміни параметрів електромагнітного поля, яке поширюється у різних середовищах.

1.2. Хвильове рівняння

Рівняння Максвелла (1.1)–(1.4) пов'язують між собою вектори \vec{E} , \vec{H} , \vec{D} і \vec{B} електромагнітного поля. Диференціальні рівняння, які має задовольняти кожен з векторів, можна отримати вилученням інших векторів.

Запишемо перші два рівняння Максвелла для однорідного та ізо- тропного діелектрика, використовуючи матеріальні рівняння (1.5):

$$\begin{cases} \text{rot}\vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial\vec{H}}{\partial t}; \\ \text{rot}\vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \end{cases} \quad (1.7)$$

Візьмемо похідну за t від правої і лівої частин другого рівняння:

$$\text{rot} \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}.$$

Підставимо у це рівняння $\partial\vec{H}/\partial t$ із першого рівняння системи (1.7):

$$-\frac{1}{\mu\mu_0} \text{rot}(\text{rot}\vec{E}) = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}.$$

Використаємо відому тотожність векторного аналізу

$$\text{rot}(\text{rot}) = \text{grad}(\text{div}) - \Delta, \quad (1.8)$$

де Δ – оператор Лапласа, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Тоді, з урахуванням рівняння (1.3) та (1.8), остаточно отримаємо

$$\Delta\vec{E} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}. \quad (1.9)$$

Аналогічне рівняння можна отримати і для напруженості магнітного поля \vec{H} :

$$\Delta\vec{H} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}. \quad (1.10)$$

Рівняння (1.9) і (1.10) називають *хвильовими рівняннями*. Із цих рівнянь випливає, що існують електромагнітні хвилі, які поширюються зі швидкістю

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}}. \quad (1.11)$$

Швидкість поширення електромагнітних хвиль у вакуумі, для якого $\varepsilon = \mu = 1$, буде $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \approx 3 \cdot 10^8$ м/с. Цей результат майже збігається з експериментально отриманим значенням швидкості світла $c = 299792456$ м/с.

1.3. Плоскі й сферичні монохроматичні хвилі

Знайдемо розв'язок хвильового рівняння (1.9) для різних випадків поширення світла [2]. Припустимо, що електричне поле залежить лише від однієї координати x і часу t , тоді рівняння (1.9) з урахуванням (1.11) матиме вигляд

$$\Delta \vec{E}(x, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(x, t)}{\partial t^2}. \quad (1.12)$$

Одним із можливих розв'язків цього рівняння є *плоска монохроматична хвиля*

$$\Delta \vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right], \quad (1.13)$$

де \vec{E}_0 – амплітуда; φ_0 – початкова фаза; ω – циклічна частота, $\omega = 2\pi\nu$, де ν – частота, Гц;

$$\varphi(x, t) = \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0, \quad (1.14)$$

де φ – фаза хвилі.

Розподіл напруженості поля у плоскій монохроматичній хвилі зображено на рис. 1.1. Якщо у рівнянні (1.13) зафіксувати час $t = t_0$, то залежність поля від координати x дає «фотографію» хвилі – розподіл

напруженості поля у просторі. Нехай у момент часу t_0 точка з фазою φ_0 має координату x_0 . Тоді у момент часу $t_0 + \Delta t$ точка з цією фазою зміститься на відстань $\Delta x = v\Delta t$. Якщо $\Delta x > 0$, то хвиля поширюється уздовж додатного напрямку осі x . Щоб отримати рівняння хвилі, яка поширюється уздовж від'ємного напрямку осі x , достатньо змінити знак у виразі для фази (1.14):

$$\varphi(x, t) = \omega \left(t + \frac{x}{v} \right) + \varphi_0. \quad (1.15)$$

Отже, параметр v більш точно називати не просто швидкістю, а *фазовою швидкістю*, яка визначає швидкість переміщення хвильового фронту, тобто поверхні, на якій коливання відбуваються з однаковою фазою (1.15). У випадку, що розглядається, хвильовий фронт є плоским, перпендикулярним до осі x , де $x = x_0$.

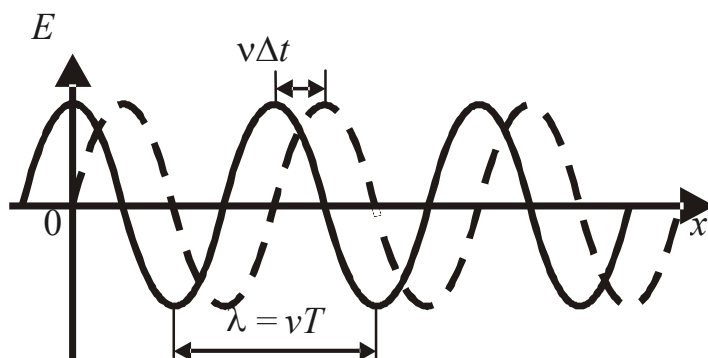


Рис. 1.1. Поширення монохроматичної хвилі

Поле хвилі (1.13) за умови $\varphi_0 = 0$ можна подати в іншому вигляді:

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos(kx - 2\pi vt), \quad (1.16)$$

де k – хвильове число, см^{-1} , $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$.

Дослідження монохроматичного світла суттєво спрощуються, якщо подати вираз (1.16) у комплексному вигляді:

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \exp[j(kx - 2\pi vt)]. \quad (1.17)$$

У багатьох випадках виникає потреба досліджувати поширення плоскої хвилі не уздовж осі x , а в деякому довільному напрямку. Нехай

цей напрямок задається одиничним вектором нормалі \vec{N} до хвильового фронту (рис. 1.2). Тоді рівняння поверхні сталої фази можна записати у вигляді $\vec{r}\vec{N} = r_0 = \text{const}$, де \vec{r} – радіус-вектор, який визначає координати довільної точки P хвильового фронту.

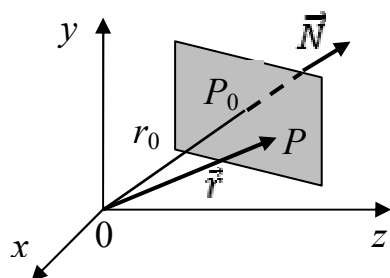


Рис. 1.2. Поширення фронту плоскої хвилі

Отже, у рівнянні плоскої хвилі (1.17) замість x слід записати скалярний добуток $\vec{r}\vec{N}$:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp[j(\vec{k}\vec{r} - 2\pi\nu t)], \quad (1.18)$$

де \vec{k} – хвильовий вектор, довжина якого дорівнює хвильовому числу, а орієнтація вказує на напрямок переміщення хвильового фронту, $\vec{k} = k\vec{N}$.

Хвильові фронти *сферичних хвиль* являють собою концентричні сфери. Аналіз цих хвиль зручно виконувати у сферичній системі координат r, θ, ϕ . Сферичні хвилі є таким розв'язком хвильового рівняння (1.9), який залежить лише від відстані r і не залежить від кутових координат θ, ϕ .

У сферичній системі координат радіальну частину оператора Лапласа можна записати у вигляді

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\vec{E}). \quad (1.19)$$

Тоді хвильове рівняння з урахуванням (1.19) матиме вигляд

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\vec{E}) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r\vec{E}). \quad (1.20)$$

Рівняння (1.20) збігається з рівнянням (1.12), якщо замінити \vec{E} на $(r\vec{E})$. Його розв'язок аналогічний виразу (1.18):

$$\vec{E}(r, t) = \frac{\vec{E}_0}{r} \exp[j(kr - 2\pi\nu t)], \quad (1.21)$$

де \vec{E}_0 – амплітуда сферичної хвилі за $r=1$;

$\vec{E}(r)$ – змінна амплітуда сферичної хвилі, яка залежить лише від радіуса r ,

$$\vec{E}(r) = \frac{\vec{E}_0}{r} \exp(jkr). \quad (1.22)$$

Рівняння (1.21) описує монохроматичну сферичну хвилю, що поширюється від центра системи координат.

Амплітуда сферичної хвилі, що збігається до центра системи координат, описується функцією

$$E(r) = \frac{\vec{E}_0}{r} \exp(-jkr). \quad (1.23)$$

1.4. Скалярні гармонічні хвилі. Рівняння Гельмгольца

Між амплітудами електричного E_0 і магнітного H_0 полів є зв'язок:
 $E_0 \sqrt{\epsilon \epsilon_0} = H_0 \sqrt{\mu \mu_0}$.

У межах скалярної теорії дифракції не розглядають взаємозв'язку між векторами електричного \vec{E} і магнітного \vec{H} полів за допомогою рівнянь Максвелла, а враховують лише скалярну амплітуду $V(x, y, z, t)$ одного з поперечних компонентів електричного або магнітного полів.

Ця амплітуда задовольняє однорідне хвильове рівняння

$$\Delta V - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0. \quad (1.24)$$

Найбільш простим розв'язком цього рівняння є *скалярна монохроматична хвиля*, яку можна подати аналогічно рівнянню (1.18) або (1.21) у вигляді

$$V(\vec{r}, t) = V(\vec{r}) \exp(-j2\pi vt). \quad (1.25)$$

Функцію (1.25) називають комплексним *оптичним сигналом*.

Запишемо хвильове рівняння (1.24) для монохроматичної хвилі (1.25):

$$\Delta V(\vec{r}) \exp(-j2\pi vt) - \frac{1}{v^2} V(\vec{r}) (-2\pi v)^2 \exp(-j2\pi vt) = 0,$$

звідки

$$\Delta V(\vec{r}) + k^2 V(\vec{r}) = 0. \quad (1.26)$$

Вираз (1.26) називають *рівнянням Гельмгольца*, його розв'язок дає змогу визначити амплітуду поля $V(\vec{r})$ у довільній точці простору, яку задано радіусом-вектором $\vec{r} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$, для монохроматичного світла.

1.5. Рівняння ейконалу й перенесення

Запишемо комплексну функцію $V(\vec{r})$ у вигляді

$$V(\vec{r}) = V(x, y, z) = V_0(x, y, z) \exp[jk_0\psi(x, y, z)], \quad (1.27)$$

де $V_0(x, y, z)$ – дійсна амплітуда поля; k_0 – хвильове число, $k_0 = 2\pi/\lambda_0$; λ_0 – довжина хвилі у вакуумі; $\psi(x, y, z)$ – оптична довжина шляху, який долає хвиля від джерела випромінювання до точки $P_0(x, y, z)$ (ейконал). Підставимо функцію (1.27) у рівняння Гельмгольца (1.26):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2} + 2jk_0 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial V_0}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial V_0}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial V_0}{\partial z} \right) + \\ & + jk_0 V_0 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - k_0^2 V_0 \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] + k_0^2 \epsilon \mu V_0 = 0. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Дорівнюючи до нуля уявну частину рівняння (1.28), отримаємо рівняння перенесення:

$$2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial V_0}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial V_0}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial V_0}{\partial z} \right) + V_0 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (1.29)$$

Дорівнюємо дійсну частину рівняння (1.28) до нуля:

$$\frac{1}{k_0^2} \left(\frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial z^2} \right) - V_0 \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right] + \epsilon \mu V_0 = 0. \quad (1.30)$$

У наближенні геометричної оптики, коли $\lambda \rightarrow 0$, маємо $1/k_0^2 \rightarrow 0$.

Тоді вираз (1.30) набуде вигляду

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 = n^2, \quad (1.31)$$

де n – показник заломлення, $n = \sqrt{\epsilon \mu}$.

Співвідношення (1.31) називають рівнянням ейконалу.

1.6. Кутовий спектр плоских хвиль

Розглянемо монохроматичне світло, яке поширюється вздовж осі z , у площині xy за $z = 0$ (рис. 1.3). Нехай амплітуда поля у цій площині описується функцією $V(x, y, 0)$. Визначимо амплітуду світлового поля $V(x, y, z)$ у довільній точці $P(x, y, z)$.

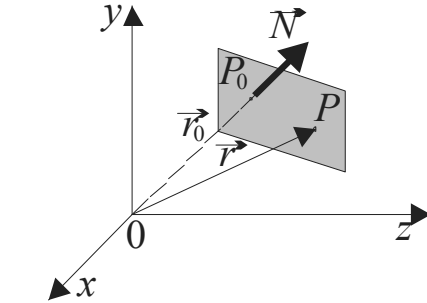


Рис. 1.3. До визначення кутового спектра плоских хвиль

У площині xy просторовий спектр розподілу амплітуди $V(x, y, 0)$ поля визначається двовимірним перетворенням Фур'є:

$$\tilde{V}(v_x, v_y) = F\{V(x, y, 0)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} V(x, y, 0) \exp[-j2\pi(v_x x + v_y y)] dx dy, \quad (1.32)$$

де v_x, v_y – просторові частоти.

У цьому випадку функцію $V(x, y, 0)$ можна подати у вигляді інтеграла Фур'є:

$$V(x, y, 0) = F^{-1}\{\tilde{V}(v_x, v_y)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}(v_x, v_y) \exp[j2\pi(v_x x + v_y y)] dv_x dv_y. \quad (1.33)$$

Розглянемо рівняння для комплексної скалярної амплітуди плоскої хвилі (1.18), яке має вигляд

$$V(\vec{r}) = V_0 \exp[j(\vec{k} \vec{r})], \quad (1.34)$$

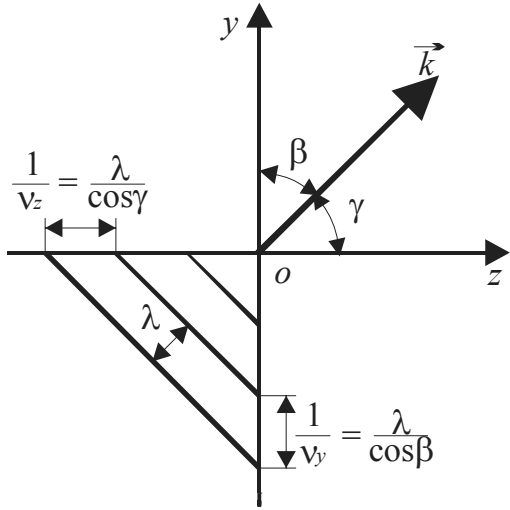
де \vec{r} – радіус-вектор, $\vec{r} = x\vec{x}_0 + y\vec{y}_0 + z\vec{z}_0$; $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ – орти уздовж відповідних осей; \vec{k} – хвильовий вектор, $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}(\vec{x}_0 \cos \alpha + \vec{y}_0 \cos \beta + \vec{z}_0 \cos \gamma)$; α, β, γ – кути між напрямком поширення плоскої хвилі і відповідними осями (рис. 1.3).

Для амплітуди $V_0 = 1$ рівняння (1.34) має вигляд

$$V(\vec{r}) = \exp \left[j \frac{2\pi}{\lambda} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) \right]. \quad (1.35)$$

Якщо плоска хвиля поширюється у площині yz (рис. 1.4), то вона має амплітуду

$$V(\vec{r}) = \exp \left[j 2\pi \left(y \frac{\cos \beta}{\lambda} + z \frac{\cos \gamma}{\lambda} \right) \right].$$



Порівнюючи рівняння (1.35) і (1.33) дійдемо висновку, що експоненту у рівнянні (1.33) можна розглядати як плоску хвилю одиничної амплітуди, напрямом поширення якої визначається кутами α, β, γ ,

$$\cos \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}. \quad (1.36)$$

При цьому $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$,

Рис. 1.4. Поширення плоскої хвилі $\cos \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}$; а просторовий спектр $V(v_x, v_y) = \tilde{V} \left(\frac{\cos \alpha}{\lambda}, \frac{\cos \beta}{\lambda} \right)$ називають *кутовим спектром* світ-

лового поля. Це означає, що під час спектрального аналізу розподілу світлового поля у довільній площині його окремі просторові складові можна ототожнювати з плоскими хвилями (1.36), які поширюються в різних напрямках. Амплітуду поля в довільній точці можна обчислити як результат інтерференції, тобто складанням амплітуд цих плоских хвиль з урахуванням фазових зсувів, яких вони набувають, коли досягають певної точки.

Розглянемо поширення кутового спектра від площини xu на відстань z . Визначимо амплітуду поля в точці $P(x, y, z)$ у вигляді інтеграла Фур'є (1.33):

$$V(x, y, z) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}(v_x, v_y, z) \exp \left[j 2\pi (v_x x + v_y y) \right] dv_x dv_y. \quad (1.37)$$

Функція (1.37) задовольняє рівняння Гельмгольца (1.26). Підставивши інтеграл (1.37) у вираз (1.26), знаходимо, що функція $V(x, y, z)$ має задовольняти диференціальне рівняння

$$\frac{\partial^2 \tilde{V}(v_x, v_y, z)}{\partial z^2} + k^2 (1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta) \tilde{V}(v_x, v_y, z) = 0. \quad (1.38)$$

Розв'язком рівняння (1.38) є функція

$$\tilde{V}(v_x, v_y, z) = \tilde{V}(v_x, v_y, 0) \exp(jkz \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}). \quad (1.39)$$

Із співвідношення (1.39) знаходимо передавальну функцію, яка характеризує поширення світла у вільному (без перешкод) просторі на відстань z :

$$\begin{aligned} H_{fs}(v_x, v_y) &= \frac{\tilde{V}(v_x, v_y, z)}{\tilde{V}(v_x, v_y, 0)} = \exp(jkz \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}) = \\ &= \exp \left[j \frac{2\pi}{\lambda} z \sqrt{1 - (\lambda^2 v_x^2 + \lambda^2 v_y^2)} \right], \end{aligned} \quad (1.40)$$

де v_x, v_y – просторові частоти, $v_x = \frac{\cos \alpha}{\lambda}$; $v_y = \frac{\cos \beta}{\lambda}$.

1.7. Приклади розрахунку параметрів електромагнітного поля

Приклад 1.1. Плоска електромагнітна хвиля падає нормально на поверхню плоскопаралельного шару немагнітної речовини товщиною h , діелектрична проникність якого експоненційно падає від значення ε_1 на передній поверхні до ε_2 на задній. Знайдіть час поширення такої хвилі через цей шар.

Розв'язання. Швидкість поширення фази хвилі згідно з виразом (1.11) $v = c / \sqrt{\mu \varepsilon}$. Оскільки середовище немагнітне, то $\mu = 1$. За умовою діелектрична проникність не стала величина, її значення залежить від відстані

від поверхні шару, тому швидкість теж не буде сталою величиною. Якщо сумістити передню поверхню плоскопаралельного шару з початком координат, то залежність діелектричної проникності від координати x матиме вигляд

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_1 \exp\left(-\frac{a}{h}x\right).$$

Тоді, якщо $x = h$, то $\varepsilon = \varepsilon_2$, звідки $a = \ln\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)$. Це означає, що швидкість поширення хвилі у заданому середовищі теж залежить від координати x .

Якщо поділити шар на проміжки, де швидкість можна вважати сталою величиною, то час, потрібний для того, щоб пройти елементарний проміжок,

$$dt = \frac{dx}{v(x)} = \frac{dx}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \exp\left(-\frac{a}{h}x\right)}.$$

Тоді час поширення світла через шар визначають як інтеграл

$$t = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{c} \int_0^h \exp\left(-\frac{a}{2h}x\right) dx = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{c} \left(-\frac{2h}{a}\right) \exp\left(-\frac{a}{2h}x\right) \Bigg|_0^h = \frac{2h}{c \ln\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)} (\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}).$$

Приклад 1.2. У вакуумі поширюється плоска світлова хвиля $\vec{E}(x,t) = \vec{y}_0 E_0 \cos(\omega t - kx)$, де \vec{y}_0 – орт осі y ; $E_0 = 160$ В/м; $k = 0,51$ м⁻¹. Знайдіть вектор \vec{H} у точці з координатою $x = 7,7$ м у момент часу: а) $t = 0$; б) $t = 33$ нс.

Розв'язання. Запишемо рівняння Максвелла (1.2) для вакууму в розгорнутому вигляді:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{x}_0 \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) + \vec{y}_0 \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \vec{z}_0 \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = \vec{y}_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t},$$

звідки

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}.$$

З умови прикладу маємо:

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon_0 E_0 \omega \sin(\omega t - kx),$$

звідки

$$\begin{aligned} H(x, t) &= \int \varepsilon_0 E_0 \omega \sin(\omega t - kx) dx = \frac{\varepsilon_0 E_0 \omega}{k} \cos(\omega t - kx) = \\ &= c \varepsilon_0 E_0 \cos(\omega t - kx). \end{aligned}$$

Тоді значення вектора у відповідних точках:

- а) $H(7,7;0) = c \varepsilon_0 E_0 \cos(\omega t - kx) = 8,85410^{-12} \text{ Ф/м} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ м/с} \cdot 160 \text{ В/м} \times$
 $\times \cos(-0,51 \text{ м}^{-1} \cdot 7,7 \text{ м}) = -0,30 \text{ А/м};$
- б) $H(7,7;33 \cdot 10^{-9}) = 8,85410^{-12} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 160 \times$
 $\times \cos(0,51 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 33 \cdot 10^{-9} - 0,51 \cdot 7,7) = 0,18 \text{ А/м}.$

Приклад 1.3. В однорідному та ізотропному середовищах за $\varepsilon = 3$ та $\mu = 1$ поширюється плоска електромагнітна хвиля. Амплітуда напруженості електричного поля хвилі $E_0 = 10 \text{ В/м}$. Знайдіть амплітуду напруженості магнітного поля і фазову швидкість хвилі.

Розв'язання. Між амплітудами електричного E_0 і магнітного H_0 полів є зв'язок:

$$E_0 \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} = H_0 \sqrt{\mu \mu_0}, \quad (1.41)$$

де ε_0 – електрична стала, $\varepsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$; μ_0 – магнітна стала, $\mu_0 = 1,2566 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$.

Із рівняння (1.41) маємо:

$$H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu \mu_0}} E_0 = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,8542 \cdot 10^{-12}}{1 \cdot 1,2566 \cdot 10^{-6}}} 10 = 0,046 \text{ А/м}.$$

Під час отримання розмірності було враховано, що $\Phi = \text{Кл/В}$ і $\text{Гн} = \text{В} \cdot \text{с/А}$.

Фазову швидкість хвилі розрахуємо за формулою (1.11):

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{3}} = 1,73 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Приклад 1.4. На плоский екран, розміщений у площині xu , падає під кутом $\varepsilon_1 = 1^\circ$ плоска монохроматична хвиля ($\lambda = 0,628$ мкм). Хвильовий вектор \vec{k} лежить у площині yz . Знайдіть розподіл амплітуди поля у площині екрана.

Розв'язання. Амплітуду поля плоскої хвилі визначають за рівнянням (1.29), яке подамо у вигляді

$$V(x, y, z) = V_0 \exp[j(\vec{k}\vec{r})]. \quad (1.42)$$

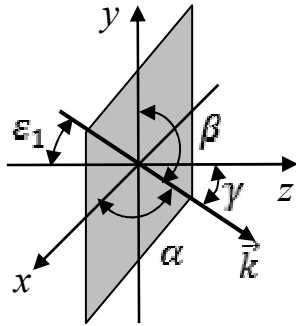


Рис. 1.5. До прикладу 1.4

Запишемо скалярний добуток двох векторів $\vec{k}\vec{r}$, використовуючи рис. 1.5, з якого видно, що хвильовий вектор \vec{k} утворює такі кути з осями x, y, z : $\alpha = \pi/2$; $\beta = \pi/2 + \varepsilon_1$; $\gamma = \varepsilon_1$. Оскільки екран розміщений у площині xu , для будь-якої точки екрана $z = 0$. Тоді рівняння (1.42) набуде вигляду

$$V(x, y, 0) = V_0 \exp\left(-j \frac{2\pi \sin \varepsilon_1}{\lambda} y\right).$$

У дійсній формі цей розподіл запишемо як

$$V(x, y, 0) = V_0 \cos\left(\frac{2\pi \sin \varepsilon_1}{\lambda} y\right).$$

З останнього виразу випливає, що амплітуда світлового поля має максимуми і мінімуми, розміщені паралельно осі x .

Приклад 1.5. Запишіть рівняння сферичної хвилі (1.22) у квадратичному наближенні, коли точкове джерело розміщене на значній відстані від площини спостереження, а область спостереження перебуває біля оптичної осі. Для цього скористайтесь наближенням $\sqrt{1 + \xi} \approx 1 + \xi/2$, яке справедливе за $\xi \ll 1$.

Розв'язання. Сферична хвиля описується рівнянням (1.22), яке по-
дамо у вигляді

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\vec{E}_0}{r} \exp(jkr).$$

Оберемо систему координат, як показано на рис. 1.6. Нехай точко-
ве джерело світла розміщене на відстані $-z$ від площини спостереження
 xy . Тоді радіус $r = SP$ становитиме

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = z \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2}}.$$

Оскільки $z^2 \gg x^2 + y^2$, то остан-
ній вираз наближено можна записати
як

$$r \approx z \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2z^2} \right). \quad (1.43)$$

Це і є *квадратичне наближення*
для радіуса r . Підставивши наближен-
ня (1.43) у рівнянні (1.22) отримаємо вираз для сферичної хвилі у квад-
ратичному наближенні:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\vec{E}_0}{z} \exp \left(j \frac{2\pi}{\lambda} z \right) \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2) \right] = \frac{\vec{E}_{0k}}{z} \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2) \right], \quad (1.44)$$

де \vec{E}_{0k} – комплексна амплітуда поля, $\vec{E}_{0k} = \vec{E}_0 \exp(jkz)$.

Приклад 1.6. Просторовий фільтр зі
змінними у часі характеристиками можна
реалізувати за допомогою інтерферометра
Фабрі–Перро. Фільтр складається з тонких
прозорих скляних пластинок, що використо-
вуються як підкладки, на внутрішні поверхні
яких нанесено речовину з високим коефіціє-
нтом відбиття (рис. 1.7). Плоска монохрома-
тична хвиля падає перпендикулярно до по-
верхні однієї зі скляних пластинок.

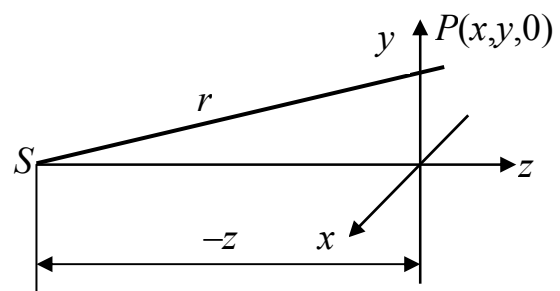


Рис. 1.6. До прикладу 1.5

Тонкі скляні пластинки

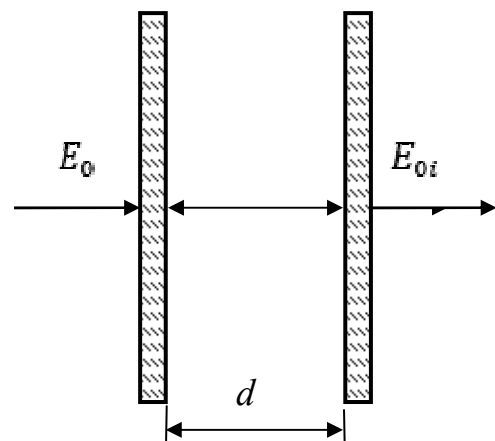


Рис. 1.7. До прикладу 1.6

Доведіть, що комплексна амплітуда хвилі, яка проходить через фільтр, описується функцією

$$E(\omega) = K t_p^2 \exp\left(-\frac{j\omega d}{c}\right) / \left[1 - \rho_p^2 \exp\left(\frac{j2\omega d}{c}\right)\right],$$

де ω – частота спадної плоскої хвилі; c – швидкість поширення світла; d – відстань між скляними пластинками; K – константа; ρ_p і t_p – відповідно амплітудні коефіцієнти відбиття і пропускання пластинок. Впливом скляних пластинок можна знехтувати.

Розв'язання. Нехай на першу пластинку інтерферометра нормально падає плоска монохроматична хвиля $E(t) = E_0 \exp(-j\omega t)$. Після проходження першої пластинки вона матиме амплітуду $E'_0 = E_0 t_p$, де t_p – амплітудний коефіцієнт пропускання пластинки. На другу пластинку падатиме хвиля з амплітудою $E''_0 = E'_0 \exp(-j\Delta\varphi) = E_0 t_p \exp(-j\Delta\varphi)$, де $\Delta\varphi$ – фазовий зсув, що виникає під час проходження хвилі від першої пластинки до другої,

$$\Delta\varphi = kd = \frac{2\pi}{\lambda} d = \frac{\omega d}{c}; \quad (1.45)$$

d – відстань між пластинками; c – швидкість поширення світла.

Одна частина хвилі E''_0 проходить через другу пластинку і має амплітуду $E_{01} = E''_0 t_p = E_0 t_p^2 \exp(-j\Delta\varphi)$, а друга частина відбивається і має амплітуду $E'_{01} = E''_0 \rho_p = E_0 t_p \rho_p \exp(-j\Delta\varphi)$, де ρ_p – амплітудний коефіцієнт відбиття пластинки.

Після відбиття від першої пластинки і проходження через другу світлова хвиля має амплітуду

$$E_{02} = E'_{01} \rho_p t_p = E_0 \rho_p^2 t_p^2 \exp(-j\Delta\varphi) \exp(-2j\Delta\varphi).$$

У результаті багаторазового відбиття між пластинками на виході інтерферометра утворюється велика кількість когерентних хвиль, які поширюються в одному напрямку. Між цими хвилями відбувається інтерференція, у результаті якої утворюється результуюча амплітуда:

$$E_{int} = E_{01} + E_{02} + \dots + E_{0i} + \dots, \quad (1.46)$$

де $E_{0i} = E_0 \rho_p^{2(i-1)} t_p^2 \exp(-j\Delta\varphi) \exp[-2j(i-1)\Delta\varphi]$, а фазу $\Delta\varphi$ визначають за формулою (1.45).

Вираз (1.46) – це сума нескінченної геометричної прогресії, яку знаходять за формулою

$$E_{int} = \frac{a_1}{1-q}, \quad (1.47)$$

де $a_1 = E_0 t_p^2 \exp(-j\Delta\varphi)$; q – знаменник прогресії, $q = \rho_p^2 \exp(-j2\Delta\varphi)$.

Тоді вираз (1.47) матиме вигляд

$$E_{int} = \frac{E_0 t_p^2 \exp(-j\Delta\varphi)}{1 - \rho_p^2 \exp(-j2\Delta\varphi)}.$$

З урахуванням виразу (1.40) маємо

$$E_{int} = \frac{E_0 t_p^2 \exp(-j\frac{\omega d}{c})}{1 - \rho_p^2 \exp(-j2\frac{\omega d}{c})}.$$

Отримана формула відповідає умові задачі, коли $K = E_0$, що й треба було довести.

1.8. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 1.1. Частота електромагнітного випромінювання (світла) $\nu = 6,91 \cdot 10^{14}$ Гц. Знайдіть значення довжини хвилі цього світла у повітрі, який колір має світло?

Відповідь: $\lambda = 434,1$ нм. Синій.

Задача 1.2. Під час поширення в якому середовищі світло з частотою $\nu = 4 \cdot 10^{14}$ с⁻¹ буде мати довжину хвилі $\lambda = 500$ нм?

Відповідь: $n = \frac{c}{\lambda\nu} = 1,5$.

Задача 1.3. Який шлях пройде фронт хвилі монохроматичного світла у вакуумі за час, протягом якого він проходить шлях $l_1 = 1$ м у склі марки ТФ1 ($n_e = 1,652$)?

Відповідь: $l_2 = l_1 n_e = 1,652$ м.

Задача 1.4. Скільки довжин хвиль монохроматичного світла з частотою коливань $\nu = 6,17 \cdot 10^{14}$ с⁻¹ розміститься на шляху довжиною

$l = 2,0$ мм: а) у вакуумі; б) у склі марки ЛКЗ ($n_e = 1,4891$).

Відповідь: $N = \frac{l}{\lambda} = \frac{lvn}{c}$; $N_v = 4113$; $N_g = 6125$.

Задача 1.5. Світлова хвиля з амплітудою напруженості магнітного поля $H_0 = 0,05$ А/м поширюється у середовищі з показником заломлення $n = 1,5$. Визначте амплітуду напруженості електричного поля.

Вказівка. Скористайтеся прикладом 1.3 (с. 21).

Відповідь: $E_0 = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_0 = 12,6$ В/м.

Задача 1.6. На непрозорий екран із прямокутним отвором розміром 4×2 мм падає під кутом $\varepsilon = 0,1^\circ$ плоска монохроматична хвиля з амплітудою $E_0 = 1$ В/м і частотою $\nu = 6 \cdot 10^{14}$ Гц. Отвір розміщений у центрі системи координат xu . Хвильовий вектор \vec{k} лежить у площині xz . Знайдіть розподіл амплітуди поля $E(x, y)$ в отворі екрана. Визначте відстань між сусідніми максимумами поля. Побудуйте графік розподілу амплітуди поля уздовж осей x та y .

Вказівка. Скористайтеся прикладом 1.4 (с. 22).

Відповідь: $E(x, y) = E_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \sin \varepsilon\right)$; $\Delta x = \frac{\lambda}{\sin \varepsilon} = 286$ мкм.

Задача 1.7. Плоский екран із круглим отвором діаметром 2 мм освітлюється сферичною монохроматичною хвилею, що розходить, одиничної амплітуди. Центр випромінювання хвилі розміщений на осі, перпендикулярній екрану, і проходить через центр отвору. Точкове джерело випромінювання перебуває на відстані 1 м від екрана. Знайдіть розподіл амплітуди поля в отворі екрана. Побудуйте графік цього розподілу, якщо довжина хвилі $\lambda = 0,5$ мкм.

Вказівка. Скористайтеся прикладом 1.5 (с. 22).

Відповідь: $E(x, y) = E(r) = \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda z} r^2\right) = \cos(2\pi r^2)$.

Задача 1.8. Визначте інтенсивність світла на виході інтерферометра Фабрі–Перро, коли плоска монохроматична хвиля падає під кутом ε_1 на

поверхню однієї зі скляних пластинок. Внутрішня поверхня пластинки має енергетичний коефіцієнт відбиття R , а відстань між пластинками d .

Вказівка. Скористайтеся прикладом 1.6 (с. 23).

$$\text{Відповідь: } I(\omega) = \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2\left(\frac{\omega d \cos \theta_1}{c}\right)}.$$

Задача 1.9. Використовуючи рівняння Гельмгольца (1.26) і рівняння для амплітуди поля (1.27) отримайте співвідношення (1.28).

РОЗДІЛ 2. ОСНОВИ СКАЛЯРНОЇ ТЕОРІЇ ДИФРАКЦІЇ

2.1. Загальні положення теорії дифракції

Дифракція світла у вузькому розумінні – явище обгинання променями світла контуру непрозорих тіл і, як наслідок, проникнення світла в область геометричної тіні. У широкому розумінні дифракція – це будь-яке відхилення, яке виникає під час поширення хвиль, від законів геометричної оптики [1].

Явища дифракції відіграють важливу роль в аналізі оптичних систем і обмежують характеристики цих систем. Розв’язання дифракційних задач є найбільш складним в оптиці. Щоб отримати точний розв’язок задачі з дифракції світла, потрібно розв’язати хвильове рівняння (1.9) за відповідних граничних умов. Через математичні труднощі такі задачі розв’язані лише для двовимірних предметів дуже простої форми. Для розв’язання практичних дифракційних задач використовують наближені методи, які ґрунтуються на принципі Гюйгенса–Френеля.

Дифракційний аналіз оптичних систем дає змогу об’єднати геометричну оптику і теорію лінійних систем та розглядати оптичні системи як фільтри просторових частот. За допомогою теорії дифракції можна встановити взаємозв’язок між розподілом електромагнітного поля у площині предметів і розподілом поля в довільній площині оптичної системи.

Векторний характер електромагнітного поля враховується лише в достатньо складній векторній теорії дифракції [2].

У межах скалярної теорії дифракції не враховують взаємозв’язок векторів електричного \vec{E} і магнітного \vec{H} полів за допомогою рівнянь Максвелла, а розглядають лише скалярну амплітуду $V(x, y, z, t)$ однієї з поперечних компонентів електромагнітного поля. Скалярна теорія дифракції дає задовільні результати, якщо виконуються дві умови:

– отвір в екрані (розмір хвильового фронту) великий порівняно з довжиною хвилі;

– дифракцію хвиль спостерігають на достатній віддалі від екрана.

Далі в цьому розділі розглядатимемо когерентне монохроматичне випромінювання.

2.2. Принцип Гюйгенса–Френеля

На практиці під час розрахунку дифракційних картин через математичні труднощі застосовують здебільшого наближені методи, в основу яких покладено *принцип Гюйгенса–Френеля*.

Згідно з принципом Гюйгенса–Френеля *кожну точку хвильового фронту можна вважати центром вторинних сферичних хвиль, а положення хвильового фронту в наступний момент часу являє собою дотичну поверхню до вторинних хвиль. Вторинні хвилі інтерферують між собою.*

Перед тим, як досліджувати дифракційні явища за допомогою принципу Гюйгенса–Френеля, перевіримо можливість застосування цього принципу до поширення світла у вакуумі між двома точками P_0P (рис. 2.1).

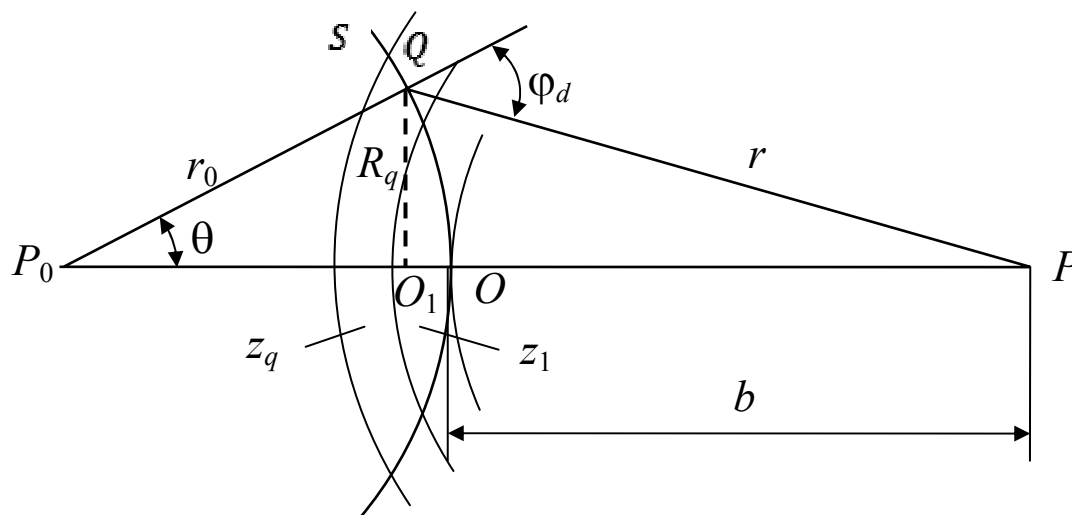


Рис. 2.1. Побудова зон Френеля

Нехай у точці P_0 розміщене точкове джерело когерентного випромінювання з довжиною хвилі λ , яке утворює у певний момент часу

сферичний хвильовий фронт S із радіусом r_0 (рис. 2.1). Згідно з рівнянням (1.22) таке джерело випромінювання утворює в точці P амплітуду поля

$$V(P) = \frac{V_0}{r_0 P} \exp(jk \cdot P_0 P), \quad (2.1)$$

де $P_0 P$ – відстань від точки P_0 до точки P .

Визначимо амплітуду поля в точці P , користуючись принципом Гюйгенса–Френеля. Амплітуда поля в точці Q на поверхні хвильового фронту S

$$V(Q) = \frac{V_0}{r_0} \exp(jkr_0). \quad (2.2)$$

Згідно з принципом Гюйгенса точка Q є джерелом вторинної сферичної хвилі, яка створює в точці P поле з амплітудою

$$dV(P) = \frac{dV(Q)}{r} \exp(jkr) = K_F(\varphi_d) V(Q) dS \frac{\exp(jkr)}{r}, \quad (2.3)$$

де $dV(Q)$ – амплітуда вторинної сферичної хвилі в точці Q ; $K_F(\varphi_d)$ – коефіцієнт нахилу, який запропонував Френель, що враховує зменшення амплітуди вторинної хвилі залежно від напрямку поширення; φ_d – кут між нормаллю до фронту S і напрямком QP , який називають *кутом дифракції*; dS – елемент поверхні хвильового фронту навколо точки Q . Згідно з Френелем вважатимемо, що коефіцієнт K_F має максимальне значення, коли $\varphi_d = 0$, і $K_F = 0$, коли $\varphi_d = \pi/2$.

Згідно з принципом Френеля у точці P відбувається інтерференція вторинних сферичних хвиль від кожної точки хвильового фронту S . Тоді, з урахуванням виразів (2.3) і (2.2), маємо

$$V(P) = \iint_S dV(P) = \frac{V_0}{r_0} \exp(jkr_0) \iint_S \frac{\exp(jkr)}{r} K_F(\varphi_d) dS. \quad (2.4)$$

Для розрахунку інтеграла (2.4) скористаємося *зонами Френеля*. Для утворення таких зон побудуємо концентричні сфери із центром у точці P із радіусами b , $b + \lambda/2$, $b + \lambda$, ..., $b + \lambda q/2$, ..., де $b = OP$; O – точка перетину відрізка $P_0 P$ із хвильовою поверхнею S (рис. 2.1). Сфери ділять фронт S на ряд зон – $z_1, z_2, \dots, z_q, \dots$, які називають *зонами Френеля*.

Для розрахунку елемента хвильової поверхні dS скористаємося рис. 2.2. Будемо розглядати dS у вигляді прямокутника, який має сторони $d\xi$ та $d\eta$. Із рис. 2.1 і 2.2 маємо, що $d\xi = r_0 d\theta$, а $d\eta = R_q d\chi = r_0 \sin\theta d\chi$, де R_q – радіус q -ї зони Френеля; χ – полярний кут, який змінюється у межах від 0 до 2π . Тоді

$$dS = r_0^2 \sin\theta d\theta d\chi. \quad (2.5)$$

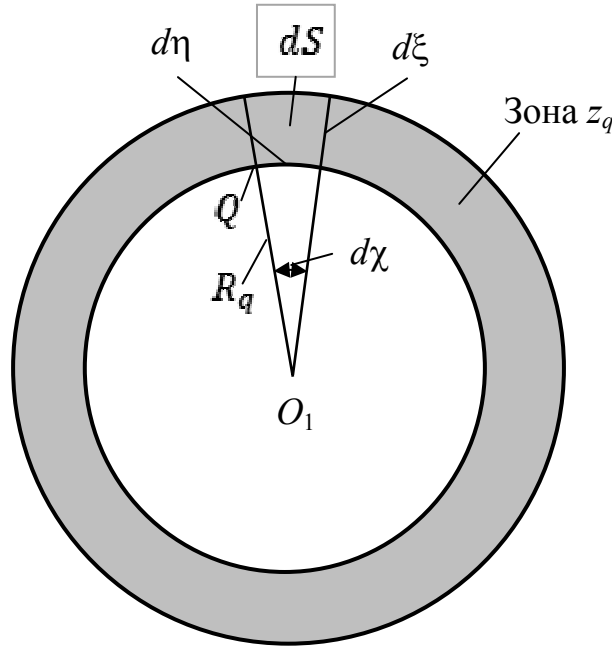


Рис. 2.2. До визначення елемента площі ds q -ї зони Френеля

Із трикутника P_0QP за теоремою косинусів маємо (рис. 2.1):

$$r^2 = r_0^2 + (r_0 + b)^2 - 2r_0(r_0 + b)\cos\theta. \quad (2.6)$$

Візьмемо диференціал від правої і лівої частин рівняння (2.6):

$$2rdr = 2r_0(r_0 + b)\sin\theta d\theta,$$

звідси

$$r_0 \sin\theta d\theta = \frac{rdr}{(r_0 + b)}. \quad (2.7)$$

Підставимо рівняння (2.7) у вираз (2.5):

$$dS = \frac{r_0}{(r_0 + b)} r dr d\chi. \quad (2.8)$$

Нехай відрізки r_0 і b великі порівняно з довжиною хвилі λ , тоді можна вважати, що в будь-якій зоні Френеля z_q значення коефіцієнта K_F

стале і дорівнює K_{Fq} . З урахуванням виразу (2.8) зона Френеля z_q створює в точці P амплітуду поля

$$\begin{aligned} V_q(P) &= \iint_{S_q} dV(P) = \frac{V_0}{r_0+b} \exp(jkr_0) K_{Fq} \int_0^{2\pi} \int_{b+(q-1)\lambda/2}^{b+q\lambda/2} \exp(jkr) d\chi dr = \\ &= 2\pi \frac{V_0 \exp(jkr_0)}{r_0+b} K_{Fq} \frac{1}{jk} \exp(jkr) \Big|_{b+(q-1)\lambda/2}^{b+q\lambda/2} = 2\pi \frac{V_0 \exp[jk(r_0+b)]}{r_0+b} K_{Fq} \times \\ &\quad \times \frac{1}{jk} \exp\left(jk \frac{q\lambda}{2}\right) \left[1 - \exp\left(-jk \frac{\lambda}{2}\right)\right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Оскільки $k\lambda = 2\pi$, останні три співмножники дають

$$\begin{aligned} &\frac{1}{jk} \exp\left(jk \frac{q\lambda}{2}\right) \left[1 - \exp\left(-jk \frac{\lambda}{2}\right)\right] = \\ &= -\frac{j\lambda}{2\pi} \exp(j\pi q) [1 - \exp(-j\pi)] = \frac{j\lambda}{\pi} (-1)^{q+1}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Після підставлення формули (2.10) у вираз (2.9) маємо

$$V_q(P) = 2j\lambda \frac{V_0 \exp[jk(r_0+b)]}{r_0+b} (-1)^{q+1} K_{Fq}. \quad (2.11)$$

Результуючу амплітуду в точці P знайдемо, підставивши вираз (2.11) в інтеграл (2.4):

$$V(P) = \sum_{q=1}^N V_q = 2j\lambda \frac{V_0 \exp[jk(r_0+b)]}{r_0+b} \sum_{q=1}^N (-1)^{q+1} K_{Fq}. \quad (2.12)$$

Аналіз формули (2.12) свідчить про те, що результуюча амплітуда в точці P – це сума амплітуд V_q , знаки яких послідовно змінюються, тобто

$$V(P) = V_1 - V_2 + V_3 - V_4 \pm V_N, \quad (2.13)$$

де знак $<+>$ відповідає непарному значенню $N = 2n + 1$, а знак $<->$ – парному значенню $N = 2n$.

Для розрахунку суми (2.13) скористаємося методом Шустера. Вважатимемо, що $V_{q-1} > V_q > V_{q+1}$ і $V_{q-1} \approx V_q \approx V_{q+1}$. Для непарного значення N подамо ряд (2.13) у вигляді

$$\begin{aligned} V(P) &= \frac{1}{2} V_1 + \left(\frac{1}{2} V_1 - V_2 + \frac{1}{2} V_3\right) + \left(\frac{1}{2} V_3 - V_4 + \frac{1}{2} V_5\right) + \dots + \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} V_{N-2} - V_{N-1} + \frac{1}{2} V_N\right) + \frac{1}{2} V_N. \end{aligned}$$

Оскільки $V_q \approx (V_{q-1} + V_{q+1})/2$, то $V(P) = \frac{1}{2} V_1 + \frac{1}{2} V_N$.

Аналогічно можна розрахувати амплітуду $V(P)$ для парного значення N :

$$V(P) = \frac{1}{2}V_1 + \left(\frac{1}{2}V_1 - V_2 + \frac{1}{2}V_3\right) + \dots + \left(\frac{1}{2}V_{N-3} - V_{N-2} + \frac{1}{2}V_{N-1}\right) + \frac{1}{2}V_{N-1} - V_N = \frac{1}{2}V_1 - \frac{1}{2}V_N.$$

Отже, результуючу амплітуду в точці P знаходять за співвідношенням

$$V(P) = \frac{1}{2}V_1 \pm \frac{1}{2}V_N. \quad (2.14)$$

Для останньої зони, яку видно з точки P , QP стає дотичною до хвильового фронту, тобто $\varphi_{dN} = \pi/2$, а $K_{FN} = 0$. У цьому випадку співвідношення (2.14) матиме вигляд

$$V(P) = \frac{1}{2}V_1 = j\lambda \frac{V_0 \exp[jk(r_0+b)]}{r_0+b} K_{F1}. \quad (2.15)$$

Вираз (2.15) свідчить про те, що *результуюча амплітуда в точці P , сформованій всім хвильовим фронтом, дорівнює половині амплітуди, яку формує в цій точці перша зона Френеля.*

Співвідношення (2.15) збігається з виразом (2.1) для амплітуди сферичної хвилі, коли $P_0P = r_0 + b$, а $j\lambda K_{F1} = 1$, тобто якщо

$$K_{F1} = \frac{1}{j\lambda} = \frac{\exp(-j\pi/2)}{\lambda}. \quad (2.16)$$

Множник $\exp(-j\pi/2)$ у виразі (2.16) вказує на зміну фази вторинних хвиль відносно первинної хвилі на чверть періоду. Множник $1/\lambda$ свідчить про те, що амплітуда вторинних хвиль зменшується у $1/\lambda$ разів. Отже, можна дійти висновку, що за цих умов відносно амплітуди і фази вторинних хвиль принцип Гюйгенса–Френеля правильно описує поширення сферичних хвиль у вакуумі. Однак наведені вище додаткові припущення потрібно розглядати як зручний спосіб інтерпретації математичних виразів. Інакше кажучи, ці припущення не мають будь-якого фізичного змісту.

2.3. Зонна пластинка Френеля

Принцип Гюйгенса–Френеля і метод зон Френеля, які було розглянуто в п. 2.1, дають змогу зробити такі висновки:

1. Якщо хвильовий фронт повністю відкритий, результуюча амплітуда в точці P дорівнює половині амплітуди, яку формує у цій точці перша зона Френеля, тобто $V(P) = V_0 = V_1/2$.

2. Якщо хвильовий фронт повністю відкритий, результуюча інтенсивність у точці P $I(P) = |V_0|^2 = I_0$ дорівнює 1/4 інтенсивності $I_1 = |V_1(P)|^2$, яку формує у цій точці перша зона Френеля, оскільки $V_0 = V_1/2$, тобто $I_0 = I_1/4$.

3. Розмістимо перпендикулярно до відрізка P_0P непрозорий екран із круглим отвором, центр якого збігається з точкою O (рис. 2.1). У цьому випадку результуюча амплітуда в точці P буде формуватися лише зонами Френеля, розміщеними в отворі. Якщо в отворі розміщується за певних умов лише перша зона Френеля, то інтенсивність у точці P буде у чотири рази більшою за інтенсивність для випадку, коли екрана немає, тобто $I_1 = 4I_0$ оскільки $V_1 = 2V_0$.

4. З наступним збільшенням розміру отвору інтенсивність у точці P буде зменшуватися, оскільки перші два члени V_1 та V_2 у виразі (2.13) мають різні знаки. Більше того, якщо в отворі розміщені лише дві зони Френеля, то результуюча амплітуда згідно з виразом (2.13) становитиме $V(P) = V_1 - V_2 \approx 0$, тобто у точці P буде майже повна темнота. Надалі зі збільшенням розмірів отвору спостерігається періодична зміна інтенсивності у точці P . Такий самий результат можна отримати і тоді, коли розміри отвору і положення джерела випромінювання залишаються незмінними, а точка спостереження P переміщується до екрана.

5. Якщо в точці O розмістити непрозорий екран, який затуляє лише першу зону Френеля, то результуюча амплітуда згідно з виразом (2.13) становитиме

$$V(P) = -V_2 + V_3 - V_4 + \dots = -\frac{1}{2}V_1 + \left(\frac{1}{2}V_1 - V_2 + \frac{1}{2}V_3\right) + \dots = -\frac{1}{2}V_1. \quad (2.17)$$

Вираз (2.17) означає, що в центрі геометричної тіні диска інтенсивність світла $I(P) = |V_1/2|^2 = I_0$, яку називають *плямою Пуассона*, буде такою самою, як у випадку, коли диска немає.

6. Якщо затулити всі парні (або непарні) зони Френеля, то результуюча амплітуда

$$V(P) = V_1 + V_3 + V_5 + \dots \quad (2.18)$$

Це означає, що інтенсивність у точці суттєво збільшується порівняно з тією, яка була без екрана. Тобто такий екран, який називають *зонною пластинкою Френеля*, веде себе подібно лінзі, що фокусує світло.

7. Якщо змінити фази всіх парних (або непарних) зон на протилежні, то

$$V(P) = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + \dots \quad (2.19)$$

При цьому інтенсивність у точці P (фокусі пластинки Френеля) ще збільшиться.

Співвідношення (2.18) і (2.19) використовують під час проектування зонних пластинок Френеля.

Розрахуємо радіус q -ї зони Френеля, використовуючи рис. 2.1. Із трикутників P_0QO_1 і PQO_1 маємо:

$$QO_1^2 = R_q^2 = r_0^2 - (r_0 - \Delta_q)^2 = r^2 - (b + \Delta_q)^2, \quad (2.20)$$

де $\Delta_q = O_1O$; $r = b + \lambda q/2$.

Звідси

$$2r_0\Delta_q = r^2 - b^2 - 2b\Delta_q \approx b\lambda q - 2b\Delta_q \Rightarrow \Delta_q = \frac{b\lambda q}{2(r_0+b)}.$$

Підставимо значення Δ_q у формулу (2.20):

$$R_q^2 = r_0^2 - (r_0 - \Delta_q)^2 \approx 2r_0\Delta_q = \frac{r_0 b \lambda q}{r_0 + b}.$$

Звідси

$$R_q = \sqrt{\frac{r_0 b}{r_0 + b}} \lambda q. \quad (2.21)$$

Визначимо розміри R_q і кількість q зон Френеля, які розміщуються в отворі екрана діаметром D . Нехай екран перебуває на відстані a та a'

від джерела світла P_0 і точки спостереження P відповідно (рис. 2.3). Із точок P_0 і P як із центрів опишемо сфери, які проходять через краї отвору AB . Із трикутника P_0AO маємо

$$AO^2 = \frac{D^2}{4} = P_0A^2 - P_0O^2 = (a + OF)^2 - a^2 \approx 2aOF.$$

Аналогічно із трикутника PAO маємо

$$\frac{D^2}{4} \approx 2a'EO,$$

звідси

$$EF = EO + OF = \frac{D^2}{8} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \right).$$

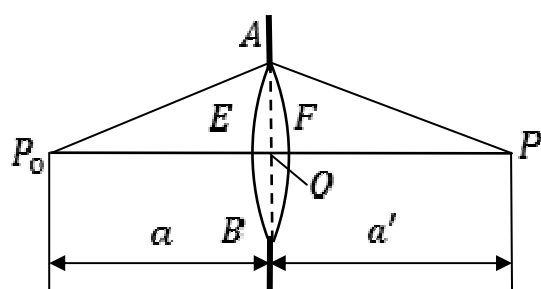


Рис. 2.3. Визначення кількості зон Френеля

Кількість зон q знайдемо діленням відрізка EF на $\lambda/2$:

$$q = \frac{D^2}{4\lambda} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} \right). \quad (2.22)$$

Із формули (2.22) маємо

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{4q\lambda}{D^2} = \frac{1}{f_q}. \quad (2.23)$$

Вираз (2.23) – це формула лінзи, де f – фокусна відстань зонної пластинки Френеля,

$$f_q = \frac{D^2}{4q\lambda}. \quad (2.24)$$

Якщо q – ціле число, то D буде діаметром, а $R_q = D/2$ – радіусом q -ї зони Френеля, точніше її зовнішнього краю. Із виразу (2.23) маємо

$$R_q = \sqrt{\frac{aa'}{a+a'}} q\lambda. \quad (2.25)$$

Отримані вирази 2.21 і 2.25 співвідносяться лише між собою.

Наприклад, якщо $a = a' = 1$ м, $\lambda = 0,6$ мкм, то $R_1 = 0,55$ мм, $R_2 = 0,77$ мм, $R_3 = 0,955$ мм.

2.4. Теорія дифракції Кірхгофа

2.4.1. Інтегральна теорема Гельмгольца–Кірхгофа

Інтегральна теорема Гельмгольца–Кірхгофа виражає розв’язок однорідного диференціального рівняння Гельмгольца (1.26) у довільній точці P_0 через значення цього розв’язку та його першої похідної на довільній замкнутій поверхні S , з точкою P_0 всередині (рис. 2.4).

Розглянемо строго монохроматичне випромінювання у точці $P(\vec{r})$, яке задовольняє рівняння Гельмгольца (1.26):

$$\Delta V(\vec{r}) + k^2 V(\vec{r}) = 0. \quad (2.26)$$

Для розв’язання цього рівняння використаємо *теорему Гріна*: нехай V і G – дві довільні комплексні функції координат, а S – замкнена

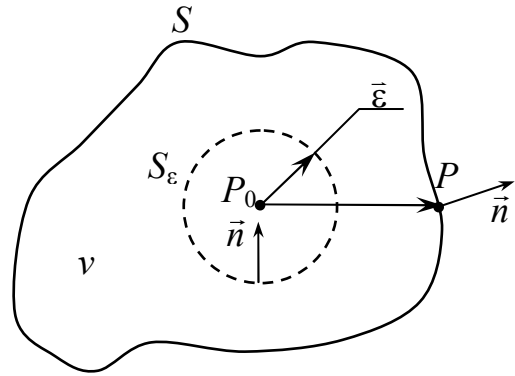


Рис. 2.14. Виведення інтегральної теореми Гельмгольца–Кірхгофа

поверхня, яка обмежує об’єм v . Якщо функції V та G та їх перші й другі похідні однозначні і неперервні всередині об’єму v і на поверхні S , то справджується співвідношення

$$\iiint_v (G\Delta V - V\Delta G) dv = \iint_S \left(G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS, \quad (2.27)$$

де $\partial/\partial n$ – часткова похідна на поверхні S , яка береться у напрямку зовнішньої нормалі \vec{n} до цієї поверхні. Допоміжну функцію $G(P)$ називають *функцією Гріна*.

Як функцію Гріна оберемо функцію, яка описує сферичну хвилю одиничної амплітуди, що поширюється з точки P_0 . Згідно з рівнянням (1.22) така функція має вигляд

$$G(\vec{r}) = \frac{\exp(jkr)}{r}, \quad (2.28)$$

де $\vec{r} = \overline{P_0 P}$ – вектор, напрямлений з точки P_0 у довільну точку P , розміщену на поверхні S .

Щоб можна було застосувати теорему Гріна (2.27), слід вилучити точку P_0 , в якій функція $G(\vec{r} = \mathbf{0})$ має розрив. Для цього побудуємо сферу з центром у точці P_0 , яка має радіус ε і площу S_ε . Застосуємо тепер теорему Гріна до об'єму v^i , обмеженого поверхнями S і S_ε . Зовнішня нормаль \vec{n} напрямлена всередину на поверхні S_ε (рис. 2.4).

Функція Гріна (2.28) описує амплітуду монохроматичної хвилі і тому задовольняє рівняння Гельмгольца (2.1), тобто

$$\Delta G(\vec{r}) + k^2 G(\vec{r}) = 0. \quad (2.29)$$

Помножимо вираз (2.26) на V , а вираз (2.29) на G і віднімемо вираз (2.29) від виразу (2.26):

$$G\Delta V + k^2 GV - V\Delta G - k^2 VG = 0. \quad (2.30)$$

Підставимо рівняння (2.30) в теорему (2.27):

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{S+S_\varepsilon} \left(G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS = \\ &= \iint_S \left(G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS + \iint_{S_\varepsilon} \left(G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS, \end{aligned} \quad (2.31)$$

де

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial G}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\exp(jkr)}{r} \left(jk - \frac{1}{r} \right) \cos(\vec{r} \wedge \vec{n}), \quad (2.32)$$

де $(\vec{r} \wedge \vec{n})$ – кут між вектором \vec{r} і зовнішньою нормаллю \vec{n} ; $\vec{r} = \overline{P_0 P}$.

Розглянемо інтеграл на поверхні S_ε :

$$I = \iint_{S_\varepsilon} \left(G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS, \quad (2.33)$$

для якого функція Гріна (2.28) та її похідна (2.32) мають вигляд

$$G(\varepsilon) = \frac{\exp(jk\varepsilon)}{\varepsilon}, \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\exp(jk\varepsilon)}{\varepsilon} \left(jk - \frac{1}{\varepsilon} \right). \quad (2.35)$$

Перейдемо у виразі (2.33) від інтегрування по сферичній поверхні S_ε до інтегрування по тілесному куту $d\Omega = dS/\varepsilon^2$.

З урахуванням функцій (2.34) і (2.35) інтеграл (2.33) матиме вигляд

$$I = \iint_{4\pi} \left[\frac{\exp(jk\varepsilon)}{\varepsilon} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\exp(jk\varepsilon)}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} - jk \right) \right] \varepsilon^2 d\Omega. \quad (2.36)$$

Якщо радіус ε наближається до нуля, то через неперервність функції V у точці P_0 інтеграл (2.36) набуває вигляду

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{4\pi} \left[\frac{\exp(jk\varepsilon)}{\varepsilon} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\exp(jk\varepsilon)}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} - jk \right) \right] \varepsilon^2 d\Omega = -V(P_0)4\pi. \quad (2.37)$$

Із співвідношень (2.31) і (2.37) маємо

$$V(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS. \quad (2.38)$$

Теорема Гельмгольца–Кірхгофа (2.38) відіграє важливу роль у скалярній теорії дифракції, оскільки дає змогу виразити поле в точці P_0 через значення цього поля на замкненій поверхні S , яка оточує цю точку.

2.4.2. Дифракція на плоскому екрані

Розглянемо найбільш важливий для практики випадок, коли дифракція світла відбувається на отворі в нескінченному непрозорому плоскому екрані. Щоб знайти поле в будь-якій точці P_0 за екраном, скористаємося теоремою Гельмгольца–Кірхгофа (2.38). Замкнену поверхню S подамо у вигляді плоскої поверхні S_1 і сферичної поверхні S_2 , як зображено на рис. 2.5,

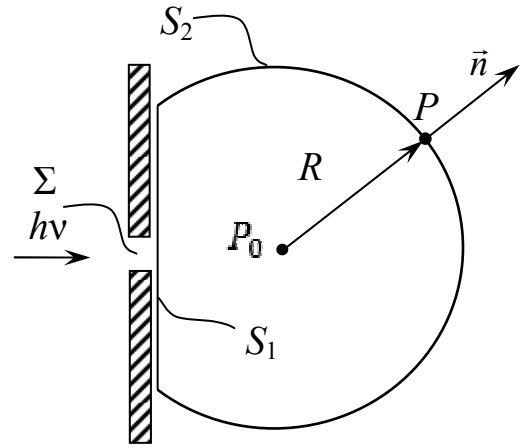


Рис. 2.5. До виведення формули (2.44)

$$V(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1+S_2} \left(G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS. \quad (2.39)$$

Розглянемо спочатку інтеграл (2.39) на сферичній поверхні S_2 радіусом R із центром у точці P_0 . Для цієї поверхні функція Гріна (2.28) та її похідна (2.32) мають вигляд

$$G(R) = \frac{\exp(jkR)}{R}, \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} \approx \frac{\exp(jkR)}{R} (jk). \quad (2.41)$$

У формулі (2.41) зроблено наближення, що для великих значень R виконується умова $\frac{1}{R} \ll k = 2\pi/\lambda$.

Підставивши функції (2.40) і (2.41) у вираз (2.39), маємо:

$$\iint_{S_2} \left[\frac{\exp(jkR)}{R} \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\exp(jkR)}{R} jk \right] dS = \iint_{\Omega} \frac{\exp(jkR)}{R} \left[\frac{\partial V}{\partial n} - Vjk \right] R^2 d\Omega, \quad (2.42)$$

де Ω – тілесний кут з вершиною у точці P_0 , утворений сферичною поверхнею S_2 .

Розглянемо інтеграл (2.42), коли $R \rightarrow \infty$. Цей інтеграл буде дорівнювати нулю, якщо виконується умова Зоммерфельда:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{\partial V}{\partial n} - Vjk \right] R = 0. \quad (2.43)$$

Фізично умова (2.43) виконується. Справді, якщо світло з'явилося в момент часу t_0 , то за час $t - t_0$ воно поширилося на відстань $c(t - t_0)$, де c – швидкість світла. Тому, якщо обрати радіус сфери S_2 $R \gg c(t - t_0)$, то $V(P) = 0$ і $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$.

Отже, якщо виконується умова Зоммерфельда (2.43), амплітуду світла у точці P_0 визначають за виразом

$$V(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left(G \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS. \quad (2.44)$$

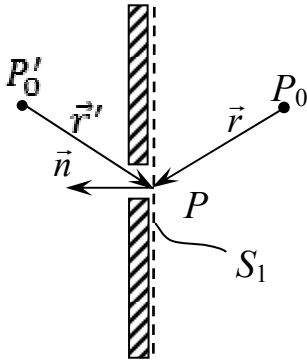


Рис. 2.6. До вибору функції Гріна у разі дифракції на плоскому екрані

Для обчислення інтеграла (2.44) обемо нову функцію Гріна, яка описує поле, утворене двома точковими джерелами одиничної амплітуди, розміщеними в точках P_0 і P_0' симетрично відносно екрана (рис. 2.6). Джерела світла випромінюють із різницею фаз π . У цьому разі функція Гріна та її похідна матимуть вигляд

$$G(P) = \frac{\exp(jkr)}{r} - \frac{\exp(jkr')}{r'}, \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\exp(jkr)}{r} jk \cos(\vec{r} \wedge \vec{n}) - \frac{\exp(jkr')}{r'} jk \cos(\vec{r}' \wedge \vec{n}), \quad (2.46)$$

де \vec{n} – зовнішня нормаль до поверхні S_1 ; $\vec{r}' = \overrightarrow{P_0'P}$ (рис. 2.6).

У виразі (2.46) зроблено припущення, що $k \gg 1/r$.

На поверхні S_1 для симетричних точок P_0 і P'_0 маємо $r' = r$ і $\cos(\vec{r}' \wedge \vec{n}) = -\cos(\vec{r} \wedge \vec{n})$. Тому на поверхні S_1 співвідношення (2.45) і (2.46) мають вигляд

$$G(P) = 0; \quad \frac{\partial G}{\partial n} = 2 \frac{\exp(jkr)}{r} jk \cos(\vec{r} \wedge \vec{n}). \quad (2.47)$$

Підставимо співвідношення (2.47) в інтеграл (2.44):

$$V(P_0) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{S_1} V(P) \frac{\exp(jkr)}{r} \cos(\vec{r} \wedge \vec{n}) dS. \quad (2.48)$$

Для спрощення виразу (2.48) скористаємося граничними умовами Кірхгофа, згідно з якими:

1. У межах отвору Σ в екрані розподіл поля $V(P)$ має таке саме значення, як і у випадку, коли екрана не було.

2. За межами отвору Σ поле на поверхні S_1 дорівнює нулю, тобто $V(P) = 0$.

За таких умов інтегрування за поверхнею S_1 у виразі (2.48) можна замінити інтегруванням за площею отвору Σ . При цьому вираз (2.48) набуде вигляду

$$V(P_0) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} V(P) \frac{\exp(jkr)}{r} jk \cos(\vec{r} \wedge \vec{n}) dS. \quad (2.49)$$

Вираз (2.49) називають *формулою дифракції Релея–Зоммерфельда* на плоскому екрані. Згідно з цією формулою амплітуду поля $V(P)_0$ у точці P_0 можна визначити за допомогою інтеграла суперпозиції, якщо відомий розподіл поля $V(P)$ у площині отвору Σ . Формула (2.49) справедлива, якщо $r \gg \lambda / 2\pi$.

2.5. Дифракція Френеля

Вираз (2.49) є найбільш загальною формулою у скалярній теорії дифракції. На практиці найчастіше площина екрана x_0y_0 (рис. 2.7) паралельна площині спостереження x_0y_0 (рис. 2.7).

Згідно з граничними умовами Кірхгофа амплітуда поля $V(P) = V(x, y)$ визначена всередині отвору Σ , а за його межами дорівнює

нулю, що дає змогу розглядати інтеграл (2.49) у нескінченних межах, тобто

$$V(x_0, y_0) = \iint_{-\infty}^{\infty} V(x, y) h(x, y; x_0, y_0) dx dy, \quad (2.50)$$

де $h(x, y; x_0, y_0)$ – вагова функція дифракції Релея–Зоммерфельда,

$$h(x, y; x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda} \frac{\exp(jkr)}{r} \cos(\vec{r} \wedge \vec{n}); \quad (2.51)$$

$$r = P_0 P = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z^2} = z \sqrt{1 + \frac{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}{z^2}}. \quad (2.52)$$

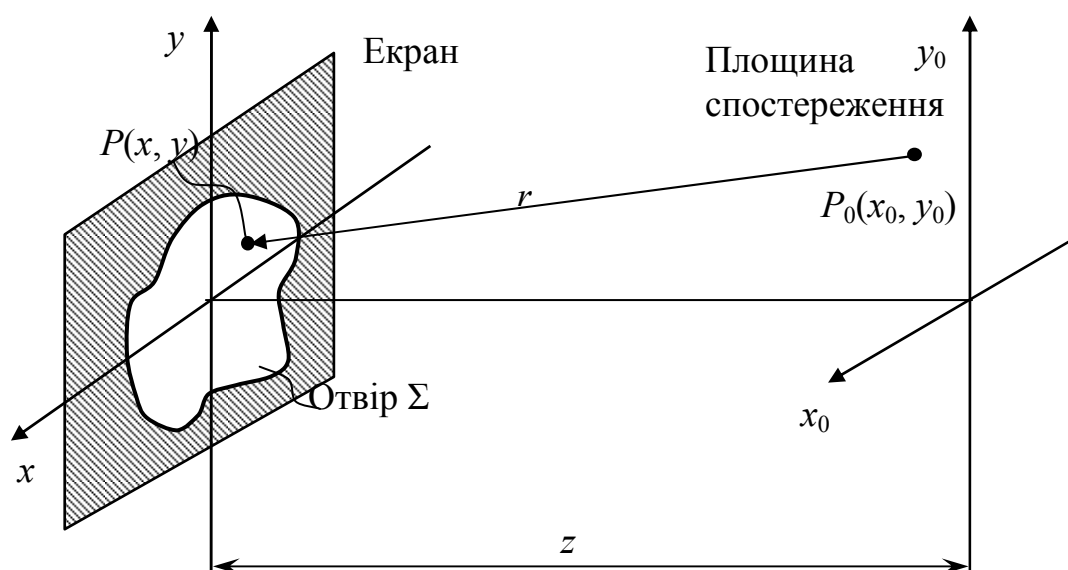


Рис. 2.7. Схема дифракції Френеля

Щоб спростити обчислення інтеграла (2.50), Френель запропонував такі наближення:

1. Розмір отвору в екрані набагато менший за відстань між площинами xu та x_0y_0 .

2. Дифракція спостерігається біля центра системи координат x_0y_0 , розміри якої набагато менші за відстань z .

За таких наближень можна вважати, що $r = P_0 P \approx z$, а $\cos(\vec{r} \wedge \vec{n}) \approx 1$. Слід також зазначити, що в показнику експоненти у виразі (2.51) не можна замінити r на z , оскільки при цьому виникає значна фазова похибка. Наприклад, якщо $r = z + \Delta z$, то $kr = kz + k\Delta z$. За $\Delta z = 1$ мм і $\lambda = 0,5$ мкм, тоді $k\Delta z = 400 \pi$ рад.

Цю похибку можна зменшити, якщо подати вираз (2.52) у вигляді степеневому ряду та обмежитися двома членами ряду. Скористаємось розкладом функції $\sqrt{1+t}$ у ряд з довідника [3]:

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 - \frac{5}{128}t^4 + \dots, \quad (2.53)$$

тоді

$$r \approx z \left[1 + \frac{1}{2} \frac{(x_0-x)^2 + (y_0-y)^2}{z^2} \right]. \quad (2.54)$$

Наближення Френеля (2.54) виконується, якщо $\frac{1}{8}t^2 \ll 1$ або

$$kz \frac{1}{8} \left[\frac{(x_0-x)^2 + (y_0-y)^2}{z^2} \right]^2 \ll 1 \text{ радіан},$$

звідси

$$z \gg \left\{ \frac{\pi}{4\lambda} \left[\frac{(x_0-x)^2 + (y_0-y)^2}{z^2} \right]^2 \right\}^{1/3}. \quad (2.55)$$

Простір за екраном, який задовольняє умову (2.55), називають *областю дифракції Френеля*. Наприклад, якщо $\lambda = 0,5$ мкм, а максимальні розміри отвору в екрані та області спостереження становлять 1 см, то $z \gg 40$ см.

Підставимо наближення (2.54) у вираз (2.51), тоді інтеграл (2.50) матиме вигляд

$$\begin{aligned} V(x_0, y_0) &= \iint_{-\infty}^{\infty} V(x, y) \frac{1}{j\lambda z} \exp \left\{ jkz \left[1 + \frac{(x_0-x)^2 + (y_0-y)^2}{2z^2} \right] \right\} dx dy = \\ &= \frac{1}{j\lambda z} \exp(jkz) \iint_{-\infty}^{\infty} V(x, y) \exp \left\{ j \frac{\pi}{\lambda z} [(x_0-x)^2 + (y_0-y)^2] \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Вираз (2.56) називають *рівнянням дифракції Френеля*. Множник $\exp(jkz)$ визначає постійний фазовий зсув, який не впливає на розподіл поля $V_0(x_0, y_0) = V(x_0, y_0)$. Тому надалі його не враховуватимемо.

Співвідношення (2.56) являє собою інтеграл згортки, який можна подати у вигляді

$$V_0(x_0, y_0) = V(x_0, y_0) * h_F(x_0, y_0), \quad (2.57)$$

де $h_F(x_0, y_0)$ – імпульсний відгук дифракції Френеля,

$$h_F(x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda z} \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x_0^2 + y_0^2) \right]. \quad (2.58)$$

Застосуємо теорему згортки до інтеграла (2.57). Тоді просторовий спектр розподілу амплітуди поля у площині спостереження

$$\tilde{V}_0(v_x, v_y) = F\{V_0(x_0, y_0)\} = \tilde{V}(v_x, v_y) H_F(v_x, v_y), \quad (2.59)$$

де $\tilde{V}(v_x, v_y)$ – просторовий спектр розподілу амплітуди поля в отворі екрана, $\tilde{V}(v_x, v_y) = F\{V(x_0, y_0)\}$; $F\{\}$ – оператор двовимірного перетворення Фур'є (1.32); $H_F(v_x, v_y)$ – передавальна функція дифракції Френеля,

$$H_F(v_x, v_y) = F\{h_F(x_0, y_0)\} = \exp[-j\pi\lambda z(v_x^2 + v_y^2)]; \quad (2.60)$$

v_x, v_y – просторові частоти,

$$v_x = \frac{x_0}{\lambda z}, \quad v_y = \frac{y_0}{\lambda z}. \quad (2.61)$$

2.6. Дифракція Фраунгофера

Подано рівняння дифракції Френеля (2.56) у вигляді

$$V(x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda z} \exp\left[j\frac{\pi}{\lambda z}(x_0^2 + y_0^2)\right] \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} V(x, y) \exp\left[j\frac{\pi}{\lambda z}(x^2 + y^2)\right] \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda z}(x_0 x + y_0 y)\right] dx dy. \quad (2.62)$$

Щоб спростити обчислення інтеграла (2.62) збільшуватимемо відстань z між екраном і площиною спостереження доти, поки не буде виконуватися умова

$$\exp\left[j\frac{\pi}{\lambda z}(x^2 + y^2)\right] \rightarrow 1, \text{ або } \frac{\pi}{\lambda z}(x^2 + y^2) \ll 1. \quad (2.63)$$

Із нерівності (2.63) маємо

$$z \gg \frac{\pi}{\lambda}(x^2 + y^2). \quad (2.64)$$

Частину простору за екраном, для якого виконується умова (2.64), називають *областю дифракції Фраунгофера*. Для визначених у п. 2.3 параметрів $z \gg 160$ м.

З урахуванням наближення Фраунгофера (2.64) амплітуда поля у точці P_0

$$V(x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} V(x, y) \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda z}(x_0 x + y_0 y)\right] dx dy. \quad (2.65)$$

Вираз (2.65) називають *рівнянням дифракції Фраунгофера*. Цей вираз являє собою з точністю до множника $1/j\lambda z$ двовимірне перетворення Фур'є від розподілу поля $V(x, y)$ у площині отвору для просторових частот (2.61).

2.7. Приклади розрахунку дифракції Фраунгофера

2.7.1. Прямокутний отвір

Розглянемо дифракцію Фраунгофера на отворі прямокутної форми розміром $a \times b$ (рис. 2.8). Амплітудний коефіцієнт пропускання такого отвору

$$t(x, y) = \begin{cases} 1, \text{коли } |x| \leq \frac{a}{2}; |y| \leq \frac{b}{2} \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \quad (2.66)$$

Нехай на екран нормально падає плоска монохроматична хвиля одиничної амплітуди $V_0 = 1$. Тоді амплітуда поля безпосередньо за екраном

$$V(x, y) = V_0 t(x, y) = \begin{cases} 1, \text{коли } |x| \leq \frac{a}{2}; |y| \leq \frac{b}{2} \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \quad (2.67)$$

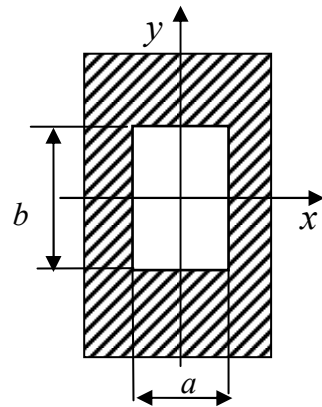


Рис. 2.8. Екран

із прямокутним отвором

$$\begin{aligned} V(x_0, y_0) &= \frac{1}{j\lambda z} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \exp \left[-j \frac{2\pi}{\lambda z} (x_0 x + y_0 y) \right] dx dy = \\ &= \frac{1}{j\lambda z} \int_{-a/2}^{a/2} \exp \left(-j \frac{2\pi}{\lambda z} x_0 x \right) dx \int_{-b/2}^{b/2} \exp \left(-j \frac{2\pi}{\lambda z} y_0 y \right) dy = \frac{1}{j\lambda z} I(x_0) I(y_0). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Обчислимо інтеграли у виразі (2,68):

$$\begin{aligned} I(x_0) &= \frac{1}{-j \frac{2\pi}{\lambda z}} \exp \left(-j \frac{2\pi}{\lambda z} x_0 x \right) \Big|_{-a/2}^{a/2} = \\ &= \frac{1}{-j \frac{2\pi}{\lambda z}} \left[\exp \left(-j \frac{\pi}{\lambda z} x_0 a \right) - \exp \left(j \frac{\pi}{\lambda z} x_0 a \right) \right] = a \frac{\sin \left(\frac{\pi a}{\lambda z} x_0 \right)}{\frac{\pi a}{\lambda z} x_0}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Аналогічно

$$I(y_0) = b \frac{\sin \left(\frac{\pi b}{\lambda z} y_0 \right)}{\frac{\pi b}{\lambda z} y_0}. \quad (2.70)$$

Тоді, з урахуванням функцій (2.69) і (2.70), маємо:

$$V(x_0, y_0) = \frac{ab}{j\lambda z} \frac{\sin(\frac{\pi a}{\lambda z} x_0)}{\frac{\pi a}{\lambda z} x_0} \frac{\sin(\frac{\pi b}{\lambda z} y_0)}{\frac{\pi b}{\lambda z} y_0} = \frac{ab}{j\lambda z} \text{sinc}\left(\frac{a}{\lambda z} x_0\right) \text{sinc}\left(\frac{b}{\lambda z} y_0\right), \quad (2.71)$$

де $\sin(\pi x) / \pi x = \text{sinc}(x)$ – sinc-функція.

Приймачі оптичного випромінювання реєструють не амплітуду поля $V(x_0, y_0)$, а його інтенсивність: $I(x_0, y_0) = |V|^2 = VV^*$. Тоді

$$I(x_0, y_0) = \left(\frac{ab}{\lambda z}\right)^2 \left[\text{sinc}\left(\frac{a}{\lambda z} x_0\right) \text{sinc}\left(\frac{b}{\lambda z} y_0\right) \right]^2. \quad (2.72)$$

Визначимо інтенсивність у центрі дифракційної картини, коли $x_0 = y_0 = 0$, використовуючи границю $\sin x / x = 1$, коли $x \rightarrow 0$. Із виразу (2.72) маємо $I(x_0, y_0) = (ab/\lambda z)^2$.

Одновимірний розподіл нормованої інтенсивності $I_n(x_0, 0) = I(x_0, 0) / I(0, 0)$ подано на рис. 2.9. З аналізу функції (2.72) видно, що інтенсивність поля дорівнює нулю в точках з координатами

$$\left(\frac{m\lambda z}{a}, y_0\right) \text{ та } \left(x_0, \frac{n\lambda z}{b}\right), \quad (2.73)$$

де m, n – цілі числа.

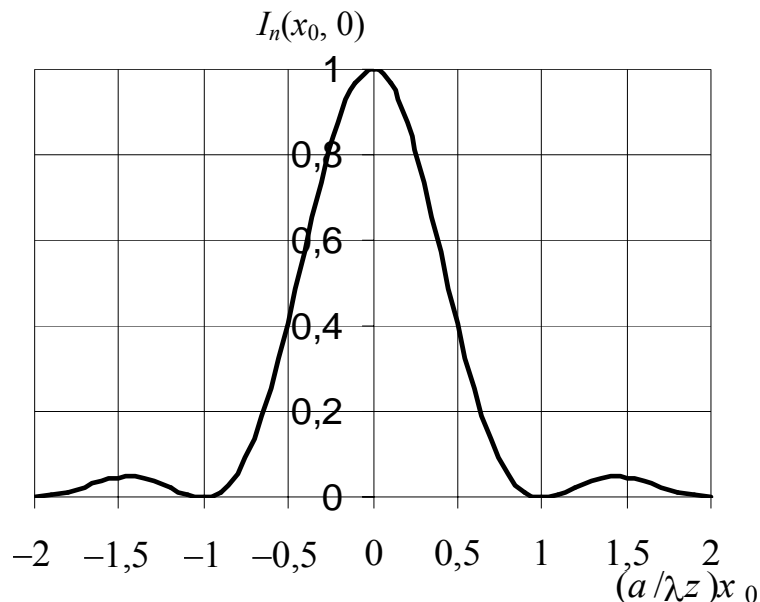


Рис. 2.9. Одновимірний розподіл інтенсивності світла під час дифракції Фраунгофера на прямокутному отворі

Розподіл поля під час дифракції на плоскому екрані можна розглядати як функцію кута дифракції (рис. 2.10):

$$\sin \varphi_d \approx \varphi_d = \frac{x_0}{r} \approx \frac{x_0}{z}. \quad (2.74)$$

Визначимо, наприклад, кутове положення першого дифракційного мінімуму. Із рис. 2.10, функції (2.72) і виразу (2.73) знаходимо, що

$$\varphi_{d1,min} = \frac{\lambda}{a}. \quad (2.75)$$

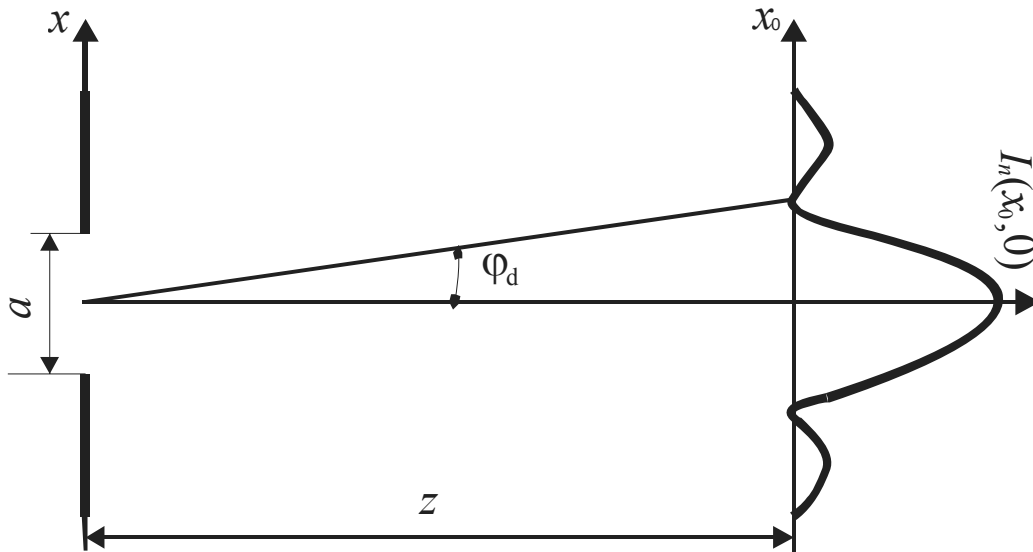


Рис. 2.10. Розподіл інтенсивності світла вздовж осі x_0 під час дифракції Фраунгофера на прямокутному отворі

2.7.2. Круглий отвір

Розглянемо дифракцію Фраунгофера на круглому отворі, який має радіус R (рис. 2.11). Амплітудний коефіцієнт пропускання такого отвору

$$t(x, y) = \begin{cases} 1, \text{коли } 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R; \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \quad (2.76)$$

Нехай на екран нормально падає плоска монохроматична хвиля одиничної амплітуди $V_0 = 1$. Тоді для функцій (2.76) амплітуда поля безпосередньо за екраном

$$V(x, y) = V_0 t(x, y) = \begin{cases} 1, \text{коли } 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R; \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \quad (2.77)$$

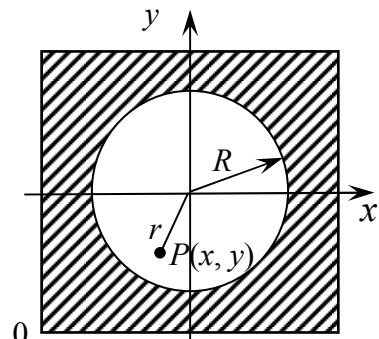


Рис. 2.11. Екран із круглим отвором

Оскільки вираз (2.77) є вісесиметричною функцією, запишемо його і рівняння дифракції Фраунгофера (2.65) у полярній системі координат, використовуючи перетворення Фур'є–Бесселя:

$$F\{V(x, y)\} = B\{V(r)\} = 2\pi \int_0^\infty V(r) J_0(2\pi \rho r) r dr, \quad (2.78)$$

де $B\{\}$ – оператор перетворення Фур'є–Бесселя; r – радіус точки $P(x, y)$ у полярній системі координат (рис. 2.11), $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; ρ – радіус просторової частоти в полярній системі координат, $\rho = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, з урахуванням виразу (2.61)

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{x_0}{\lambda z}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{\lambda z}\right)^2} = \frac{1}{\lambda z} \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \frac{r_0}{\lambda z}. \quad (2.79)$$

Тоді рівняння дифракції Фраунгофера (2.65) у полярній системі координат з урахуванням виразів (2.78) і (2.79) матиме вигляд

$$V(x_0, y_0) = V(r_0) = \frac{2\pi}{j\lambda z} \int_0^\infty V(r) J_0\left(2\pi \frac{r_0}{\lambda z} r\right) r dr, \quad (2.80)$$

де $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$;

$$V(x, y) = V(r) = \begin{cases} 1, & \text{коли } 0 \leq r \leq R; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (2.81)$$

Підставимо функцію (2.81) у рівняння (2.80):

$$V(r_0) = \frac{2\pi}{j\lambda z} \int_0^R 1 \cdot J_0\left(2\pi \frac{r_0}{\lambda z} r\right) r dr. \quad (2.82)$$

Для обчислення виразу (2.82) скористаємося табличним інтегралом із довідника [4]:

$$\int_0^z x J_0(x) dx = z J_1(z), \quad (2.83)$$

де J_0 і J_1 – функції Бесселя нульового і першого порядку.

Замінімо змінні:

$$2\pi \frac{r_0}{\lambda z} r = x, \quad r = \frac{\lambda z}{2\pi r_0} x, \quad dr = \frac{\lambda z}{2\pi r_0} dx. \quad (2.84)$$

Тоді інтеграл (2.82), з урахуванням (2.83) і (2.84) набуде вигляду

$$\begin{aligned} V(r_0) &= \frac{2\pi}{j\lambda z} \int_0^{2\pi \frac{r_0}{\lambda z} R} J_0(x) \frac{\lambda z}{2\pi r_0} x \frac{\lambda z}{2\pi r_0} dx = \frac{2\pi}{j\lambda z} \left(\frac{\lambda z}{2\pi r_0}\right)^2 2\pi \frac{r_0}{\lambda z} R J_1\left(2\pi \frac{r_0}{\lambda z} R\right) = \\ &= \frac{2\pi}{j} \frac{R}{2\pi r_0} \left[2 \frac{J_1\left(2\pi \frac{r_0}{\lambda z} R\right)}{2\pi \frac{r_0}{\lambda z} R} \right] \frac{2\pi R}{2\lambda z} r_0 = \frac{\pi R^2}{j\lambda z} \left[2 \frac{J_1\left(2\pi \frac{r_0}{\lambda z} R\right)}{2\pi \frac{r_0}{\lambda z} R} \right]. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Розподіл інтенсивності під час дифракції на круглому отворі можна описати виразом

$$I(r_0) = |V(r_0)|^2 = \left(\frac{\pi R^2}{\lambda z}\right)^2 \left[2 \frac{J_1\left(\frac{2\pi R}{\lambda z} r_0\right)}{\frac{2\pi R}{\lambda z} r_0}\right]^2, \quad (2.86)$$

де $V(r_0)$ – функція (2.85).

Розподіл інтенсивності (2.86) називають *картиною Ері*. Іntenсивність у центрі картини Ері знайдемо з виразу (2.86), використовуючи границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2J_1(x)}{x} = 1. \quad (2.87)$$

Тоді, з урахуванням (2.87),

$$I(r_0 = 0) = \left(\frac{\pi R^2}{\lambda z}\right)^2. \quad (2.88)$$

Нормований розподіл інтенсивності (2.86) з урахуванням інтенсивності (2.88) визначимо як

$$I_n(r_0) = \frac{I(r_0)}{I(0)} = \left[2 \frac{J_1\left(\frac{2\pi R}{\lambda z} r_0\right)}{\frac{2\pi R}{\lambda z} r_0}\right]^2. \quad (2.89)$$

Дифракційна картина Ері являє собою яскравий *кружок Ері*, навколо якого розміщені світлі кільця невеликої інтенсивності. Положення мінімумів можна знайти із розв'язку рівняння $J_1(2\pi R r_0 / \lambda z) = 0$, а положення максимумів – із рівняння

$$\frac{d}{dx} \left[2 \frac{J_1\left(\frac{2\pi R}{\lambda z} r_0\right)}{\frac{2\pi R}{\lambda z} r_0}\right] = 0. \quad (2.90)$$

Щоб розв'язати рівняння (2.90), скористаємося співвідношенням (9.1.30) з довідника [4], яке можна подати у вигляді

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x). \quad (2.91)$$

Тоді рівняння (2.90) набуває вигляду $J_2(2\pi R r_0 / \lambda z) = 0$.

Значення нормованої інтенсивності у послідовних максимумах і мінімумах картини Ері наведено у табл. 2.1, а графік функції (2.89) зображено на рис. 2.12. Якщо дифракційна картина віддалена від центра, відстань між сусідніми максимумами або мінімумами $\Delta r_0 = r_{0\max n+1} - r_{0\max n} = \lambda z / 2R$.

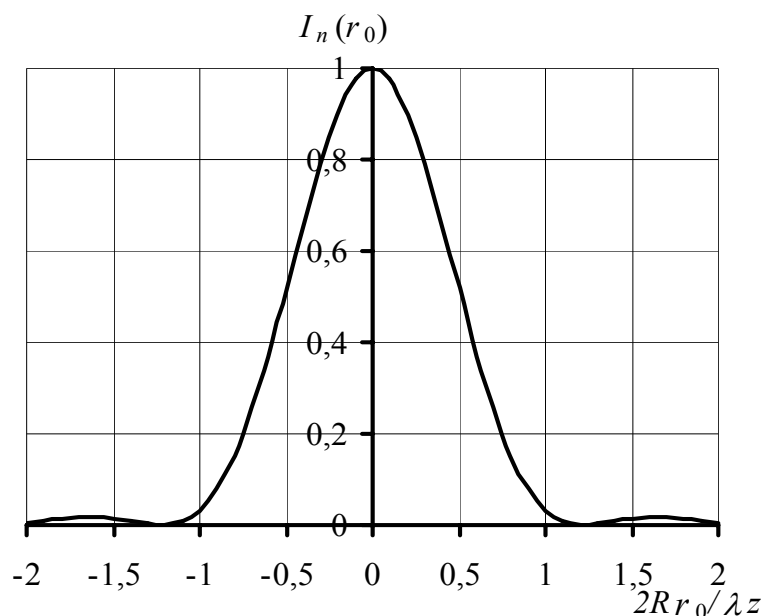


Рис. 2.12. Одновимірний розподіл інтенсивності світла за дифракції Фраунгофера на круглому отворі

Таблиця 2.1

Екстремальні значення нормованої інтенсивності у дифракційній картині Ері

$2Rr_0/\lambda z$	0	1,22	1,64	2,33	2,68	3,24
$\left[2 \frac{J_1(2\pi Rr_0/\lambda z)}{2\pi Rr_0/\lambda z} \right]^2$	1	0	0,018	0	0,004	0

Визначимо радіус кружка Ері, використовуючи дані табл. 2.1:

$$r_E = r_{0.min.1} = 1,22 \frac{\lambda z}{2R}. \quad (2.92)$$

Кутовий розмір кружка Ері

$$\varphi_E = \frac{r_E}{z} = 1,22 \frac{\lambda}{2R}. \quad (2.93)$$

Радіус кружка Ері (2.92) або (2.93) визначає дифракційну межу просторового розділення оптичної системи, яка формує зображення.

Визначимо частку світлової енергії, що міститься в центрі дифракційної картини Ері, обмеженої колом із радіусом R_0 :

$$L(R_0) = \frac{\Phi(R_0)}{\Phi(\infty)} = \frac{2\pi \int_0^{R_0} I(R_0) r_0 dr_0}{\pi R^2}, \quad (2.94)$$

де $\Phi(R_0)$ – потік світла, що перебуває в межах кола з радіусом R_0 ;

$\Phi(\infty) = I_0 S_{\Sigma} = \pi R^2$ – повний потік світла, що проходить через круглий отвір площею S_{Σ} і формує всю дифракційну картину Ері.

Підставимо вираз (2.86) у рівняння (2.94):

$$L(R_0) = \frac{2\pi}{\pi R^2} \left(\frac{\pi R^2}{\lambda z} \right)^2 \int_0^{R_0} \left[2 \frac{J_1 \left(2\pi \frac{R}{\lambda z} r_0 \right)}{2\pi \frac{R}{\lambda z} r_0} \right]^2 r_0 dr_0. \quad (2.95)$$

Обчисливши інтеграл у виразі (2.95), отримаємо такий результат (див. приклад 2.4 на с. 62):

$$L(R_0) = 1 - J_0^2 \left(2\pi \frac{R}{\lambda z} r_0 \right) - J_1^2 \left(2\pi \frac{R}{\lambda z} r_0 \right). \quad (2.96)$$

Співвідношення (2.96) називають *формулою Релея*. Для темних кілець $J_1 = 0$, і тому частина повного потоку за межами темного кільця $J_0^2 = 0$. Для кружка Ері

$$L(R_0) = 1 - J_0^2 \left(2\pi \frac{R}{\lambda z} 1,22 \frac{\lambda z}{2R} \right) = 1 - J_0^2(1,22\pi) = 0,838.$$

Це означає, що в межах кружка Ері зосереджено 83,8 % усієї енергії.

2.7.3. Синусоїдальна дифракційна ґратка

Розглянемо дифракцію Фраунгофера на амплітудній синусоїдальній дифракційній ґратці, амплітудний коефіцієнт пропускання якої описують функцією (рис. 2.13)

$$t(x, y) = \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi \nu_0 x) \right] \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{b}\right), \quad (2.97)$$

де ν_0 – просторова частота ґратки;
 $a \times b$ – розмір ґратки; m – глибина модуляції; $\text{rect}(x)$ – прямокутна rect -функція,

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1, \text{коли } |x| \leq 1/2; \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \quad (2.98)$$

Нехай на таку ґратку нормально падає плоска монохроматична хвиля одиничної амплітуди $V_0 = 1$. Тоді амплітуда поля безпосередньо за ґраткою

$$V(x, y) = V_0 t(x, y) = \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos(2\pi \nu_0 x) \right] \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{b}\right). \quad (2.99)$$

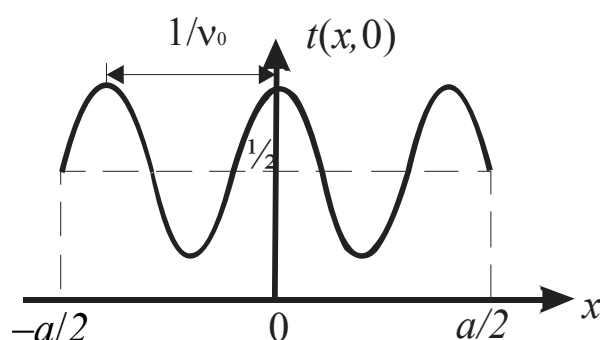


Рис. 2.13. Амплітудний коефіцієнт пропускання синусоїдальної дифракційної ґратки

Підставимо вираз (2.99) у рівняння дифракції Фраунгофера (2.65), подамо його у вигляді

$$\begin{aligned} V(x_0, y_0) &= \frac{1}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} t(x, y) \exp \left[-j \frac{2\pi}{\lambda z} (x_0 x + y_0 y) \right] dx dy = \\ &= \frac{1}{j\lambda z} F \left\{ \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos (2\pi \nu_0 x) \right] \text{rect} \left(\frac{x}{a} \right) \text{rect} \left(\frac{y}{b} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.100)$$

де $F\{ \}$ – оператор двовимірного перетворення Фур'є для просторових частот (2.61).

Застосуємо теорему згортки до рівняння (2.100):

$$V(x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda z} F \left\{ \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos (2\pi \nu_0 x) \right] \right\} * F \left\{ \text{rect} \left(\frac{x}{a} \right) \text{rect} \left(\frac{y}{b} \right) \right\}. \quad (2.101)$$

Визначимо перетворення Фур'є окремих компонентів у рівнянні (2.101):

$$\begin{aligned} F_1 &= F \left\{ \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos (2\pi \nu_0 x) \right] \right\} = \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \frac{1}{2} (e^{j2\pi \nu_0 x} + e^{-j2\pi \nu_0 x}) \right] \exp \left[-j \frac{2\pi}{\lambda z} (\nu_x x + \nu_y y) \right] dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi \nu_y y} dy \times \\ &\times \left[\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi \nu_x x} dx + \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi (\nu_x - \nu_0) x} dx + \frac{m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi (\nu_x + \nu_0) x} dx \right]. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Скористаємося інтегральним поданням дельта-функції:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm j2\pi z_0 z} dz = \delta(z_0). \quad (2.103)$$

Тоді вираз (2.102) з урахуванням інтеграла (2.103) матиме вигляд

$$F_1 = \delta(\nu_y) \left[\frac{1}{2} \delta(\nu_x) + \frac{m}{2} \delta(\nu_x - \nu_0) + \frac{m}{2} \delta(\nu_x + \nu_0) \right]. \quad (2.104)$$

Крім того,

$$F_2 = F \left\{ \text{rect} \left(\frac{x}{a} \right) \text{rect} \left(\frac{y}{b} \right) \right\} = a \text{sinc}(a \nu_x) \text{sinc}(b \nu_y). \quad (2.105)$$

Підставимо вирази (2.104) і (2.105) у рівняння (2.101):

$$\begin{aligned} V(x_0, y_0) &= \frac{1}{j\lambda z} \{F_1 * F_2\} = \frac{1}{j\lambda z} \times \\ &\times \left\{ \delta(\nu_y) \left[\frac{1}{2} \delta(\nu_x) + \frac{m}{2} \delta(\nu_x - \nu_0) + \frac{m}{2} \delta(\nu_x + \nu_0) \right] * a \text{sinc}(a \nu_x) \text{sinc}(b \nu_y) \right\}. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Скористаємося фільтрувальною властивістю дельта-функції:

$$f(z) * \delta(z - z_0) = f(z - z_0). \quad (2.107)$$

Тоді рівняння (2.106) з урахуванням (2.107) матиме вигляд

$$V(x_0, y_0) = \frac{ab}{j\lambda z} \text{sinc}(bv_y) \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2} \text{sinc}(av_x) + \frac{m}{4} \text{sinc}[a(v_x - v_0)] + \frac{m}{4} \text{sinc}[a(v_x + v_0)] \right\}. \quad (2.108)$$

Отримана функція (2.108) описує розподіл амплітуди поля для дифракції Фраунгофера на амплітудній синусоїдальній дифракційній ґратці (2.97). За достатньо великої просторової частоти v_0 дифракційної ґратки sinc -функції у виразі (2.108) зміщені одна відносно одної і не перекриваються, тому амплітуда поля у центрі дифракційної картини $V(0,0) = ab/j2\lambda z$.

Нормований розподіл інтенсивності в дифракційній картині визначають так:

$$I_n(x_0, y_0) = \left| \frac{V(x_0, y_0)}{V(0,0)} \right|^2 = \text{sinc}^2 \left(b \frac{y_0}{\lambda z} \right) \times \\ \times \left\{ \frac{1}{4} \text{sinc}^2 \left(a \frac{x_0}{\lambda z} \right) + \frac{m^2}{16} \text{sinc}^2 \left[\frac{a}{\lambda z} (x_0 - \lambda z v_0) \right] + \frac{m^2}{16} \text{sinc}^2 \left[\frac{a}{\lambda z} (x_0 + \lambda z v_0) \right] \right\}. \quad (2.109)$$

З аналізу функції (2.109) видно, що дифракційна картина має три головних максимуми – центральний і два бокових. Відстань між центральним і боковими максимумами визначається просторовою частотою дифракційної ґратки v_0 і становить $\lambda z v_0$. Ширина головних максимумів пропорційна $\lambda z/a$, тому роздільна здатність дифракційної ґратки

$$R = \frac{\lambda z v_0}{\lambda z/a} = av_0 = N_d, \quad (2.110)$$

де N_d – кількість штрихів (періодів) у дифракційній ґратці (рис. 2.8).

Графік функції (2.109), який отримано за умови, що головні максимуми не перекриваються, подано на рис. 2.14.

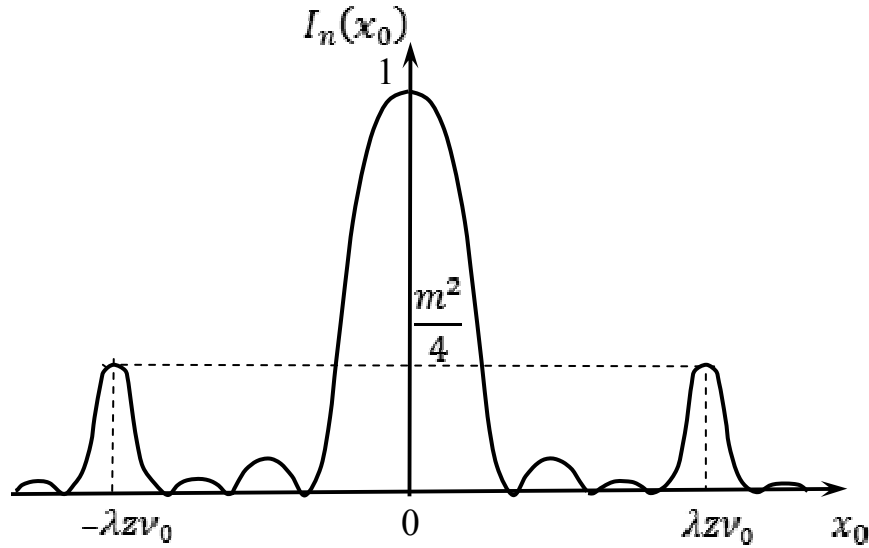


Рис. 2.14. Нормований розподіл інтенсивності для дифракції Фраунгофера на синусоїдальній дифракційній ґратці

2.8. Дифракція Френеля на прямокутному отворі

Враховуючи математичні труднощі під час розрахунку дифракційних картин Френеля за формулою (2.56), розглянемо лише найпростіший випадок дифракції на прямокутному отворі розміром $a \times b$ (рис. 2.17), амплітудний коефіцієнт пропускання якого описується функцією (2.66).

Нехай на такий екран нормально падає плоска монохроматична хвиля одиничної амплітуди. Тоді розподіл поля безпосередньо за екраном визначають за співвідношенням (2.67):

$$V(x, y) = t(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{b}\right), \quad (2.111)$$

де функцію rect визначають за співвідношенням (2.98).

Підставимо співвідношення (2.111) у рівняння (2.56):

$$\begin{aligned} V(x_0, y_0) &= \frac{1}{j\lambda z} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \exp\left\{j \frac{\pi}{\lambda z} [(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2]\right\} dx dy = \\ &= \frac{1}{j\lambda z} L(x_0) L(y_0), \end{aligned} \quad (2.112)$$

де

$$L(x_0) = \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x_0 - x)^2\right] dx; \quad (2.113)$$

$$L(y_0) = \int_{-b/2}^{b/2} \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda z} (y_0 - y)^2\right] dy. \quad (2.114)$$

Щоб обчислити інтеграл (2.113) замінимо змінні:

$$\xi = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}}(x - x_0); \quad x = \xi \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} + x_0; \quad dx = \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} d\xi. \quad (2.115)$$

За цих умов межі інтегрування визначають із виразів (2.115) як

$$\xi_1 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}\left(\frac{a}{2} + x_0\right); \quad \xi_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}}\left(\frac{a}{2} - x_0\right). \quad (2.116)$$

Тоді

$$\begin{aligned} L(x_0) &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} e^{j\frac{\pi}{2}\xi^2} \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} d\xi = \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} \left[\int_0^{\xi_2} e^{j\frac{\pi}{2}\xi^2} d\xi - \int_0^{\xi_1} e^{j\frac{\pi}{2}\xi^2} d\xi \right] = \\ &= \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} \left[\int_0^{\xi_2} \left(\cos \frac{\pi}{2} \xi^2 + j \sin \frac{\pi}{2} \xi^2 \right) d\xi - \int_0^{\xi_1} \left(\cos \frac{\pi}{2} \xi^2 + j \sin \frac{\pi}{2} \xi^2 \right) d\xi \right] = \\ &= \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} \{ [C(\xi_2) - C(\xi_1)] + j[S(\xi_2) - S(\xi_1)] \}, \end{aligned} \quad (2.117)$$

де $C(\alpha)$ – інтеграли Френеля,

$$C(\alpha) = \int_0^\alpha \cos \frac{\pi}{2} \xi^2 d\xi; \quad S(\alpha) = \int_0^\alpha \sin \frac{\pi}{2} \xi^2 d\xi. \quad (2.118)$$

Аналогічно обчислимо інтеграл (2.114):

$$L(x_0) = \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} \{ [C(\eta_2) - C(\eta_1)] + j[S(\eta_2) - S(\eta_1)] \}, \quad (2.119)$$

$$\text{де} \quad \eta_1 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}\left(\frac{b}{2} + y_0\right); \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{2}{\lambda z}}\left(\frac{b}{2} - y_0\right). \quad (2.120)$$

Підставимо рівняння (2.117) і (2.119) у співвідношення (2.112):

$$\begin{aligned} V(x_0, y_0) &= \frac{1}{j\lambda z} \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} \{ [C(\xi_2) - C(\xi_1)] + j[S(\xi_2) - S(\xi_1)] \} \times \\ &\times \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} \{ [C(\eta_2) - C(\eta_1)] + j[S(\eta_2) - S(\eta_1)] \}. \end{aligned} \quad (2.121)$$

Розподіл інтенсивності для дифракції Френеля на прямокутному отворі описується функцією

$$\begin{aligned} I(x_0, y_0) &= V \cdot V^* = \frac{1}{4} \{ [C(\xi_2) - C(\xi_1)]^2 + [S(\xi_2) - S(\xi_1)]^2 \} \times \\ &\times \{ [C(\eta_2) - C(\eta_1)]^2 + [S(\eta_2) - S(\eta_1)]^2 \}. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Отримані формули (2.121) і (2.122) дають змогу розрахувати амплітуду та інтенсивність поля в будь-якій точці (x_0, y_0) простору.

Інтеграли Френеля можна обчислити за допомогою спіралі Корню, відповідних таблиць і комп'ютерних програм.

Розглянемо два випадки розрахунку дифракційної картини Френеля.

1. **Екрана немає**, тобто $-\infty < a < \infty$; $-\infty < b < \infty$. Із формул (2.116) і (2.120) маємо $\xi_1 = -\infty$, $\xi_2 = \infty$, $\eta_1 = -\infty$, $\eta_2 = \infty$.

Із довідника [4] знаходимо, що інтеграли Френеля (2.118) становлять $C(\infty) = S(\infty) = 0,5$ і $C(-\infty) = S(-\infty) = -0,5$. Тоді $I(x_0, y_0) = 1$.

2. **Екран являє собою півплощину**, тобто $-\infty < a < 0$; $-\infty < b < \infty$ (рис. 2.15). Із формул (2.116) і (2.120) маємо $\xi_1 = -\infty$, $\xi_2 = -\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} x_0$, $\eta_1 = -\infty$, $\eta_2 = \infty$.

Тоді

$$I(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \left\{ \left[C\left(-\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} x_0\right) + \frac{1}{2} \right]^2 + \left[S\left(-\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} x_0\right) + \frac{1}{2} \right]^2 \right\}. \quad (2.123)$$

Дифракційна картина Фраунгофера (2.123) на півплощині являє собою світлі і темні смуги, паралельні краю півплощини (рис. 2.16). Смуги розміщені на освітленому боці і зменшуються до 1 з віддаленням від краю. На краю півплощини інтенсивність становить $1/4$, причому частина світлового потоку поширюється на область геометричної тіні екрана.

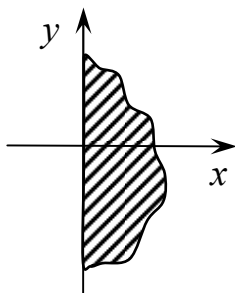


Рис. 2.15. Екран у вигляді півплощини

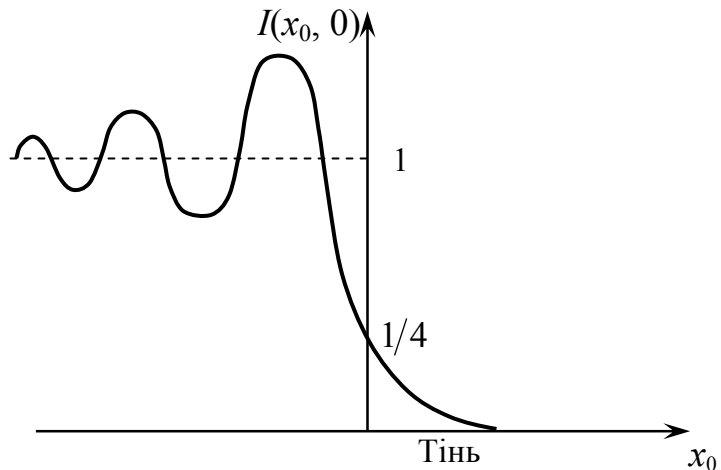


Рис. 2.16. Розподіл інтенсивності для дифракції Фраунгофера на півплощині

2.9. Приклади розрахунку дифракційних картин

Приклад 2.1. Знайдіть вираз для радіусів зон Френеля, якщо ці зони побудовані з боку увігнутої поверхні хвильового фронту сферичної хвилі, що збігається, з радіусом r_0 .

Розв'язання. Розглянемо рис. 2.17. Із трикутника QO_1P_0 маємо

$$R_q^2 = r_0^2 - (r_0 - x)^2 = 2r_0x - x^2,$$

де R_q – радіус q -ї зони Френеля, $R_q = QO_1$.

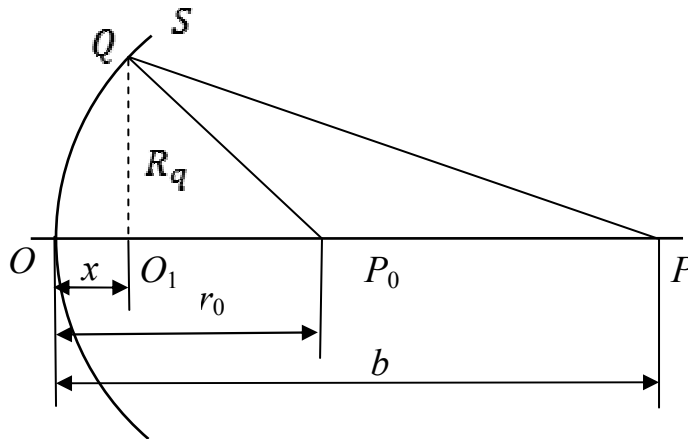


Рис. 2.17. До прикладу 2.1

Із трикутника QO_1P_0 маємо

$$R_q^2 = \left(b - \frac{q\lambda}{2}\right)^2 - (b - x)^2 = -bq\lambda + \left(\frac{q\lambda}{2}\right)^2 + 2bx - x^2.$$

Прирівнюємо праві частини останніх двох рівнянь:

$$2r_0x = -bq\lambda + \left(\frac{q\lambda}{2}\right)^2 + 2bx \approx -bq\lambda + 2bx.$$

Звідси $x = \frac{bq\lambda}{2(b-r_0)}$, тоді $R_q^2 = 2r_0x - x^2 \approx 2r_0x = \frac{r_0 bq\lambda}{(b-r_0)}$ або

$$R_q = \sqrt{\frac{r_0 b}{(b-r_0)}} q\lambda. \quad (2.124)$$

Приклад 2.2. Знайдіть вираз для розподілу інтенсивності в дифракційній картині Фраунгофера на щілині шириною a . На щілину нормально падає плоска монохроматична хвиля, амплітуда якої дорівнює одиниці. Визначте кути дифракції, які відповідають мінімумам і максимумам у дифракційній картині.

Розв'язання. Розглянемо рис. 2.10. Щоб обчислити розподіл амплітуди поля у площині спостереження використаємо рівняння дифракції Фраунгофера (2.65), яке для одновимірного випадку з урахуванням виразу (2.74) матиме вигляд

$$V(\varphi_d) = \frac{1}{j\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} V(x) \exp(-jk \sin \varphi_d \cdot x) dx, \quad (2.125)$$

де амплітуда поля в отворі екрана згідно із співвідношенням (2.67) визначається функцією

$$V(x) = V_0 t(x) = \begin{cases} 1, & \text{коли } -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (2.126)$$

Підставивши функцію (2.126) у вираз (2.125), маємо

$$V(\varphi_d) = \frac{1}{j\lambda z} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp(-jk \sin \varphi_d \cdot x) dx. \quad (2.127)$$

Щоб розрахувати інтеграл (2.127) використаємо табличний інтеграл $\int e^{cx} dx = e^{cx}/c$, де $c = -jk \sin \varphi_d$. Тоді

$$\begin{aligned} V(\varphi_d) &= \frac{1}{j\lambda z} \frac{1}{-jk \sin \varphi_d} \exp(-jk \sin \varphi_d \cdot x) \Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = \\ &= \frac{1}{j\lambda z} \frac{1}{-jk \sin \varphi_d} \left[\exp\left(-jk \sin \varphi_d \cdot \frac{a}{2}\right) - \exp\left(jk \sin \varphi_d \cdot \frac{a}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Скористаємося формулою Ейлера $e^{jx} - e^{-jx} = 2j \sin x$. Тоді

$$V(\varphi_d) = \frac{1}{j\lambda z} \frac{1}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_d} \sin\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_d\right) = \frac{a}{j\lambda z} \frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_d\right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_d}. \quad (2.128)$$

Розподіл інтенсивності визначають з амплітуди поля (2.128) як

$$I(\varphi_d) = |V(\varphi_d)|^2 = \left(\frac{a}{\lambda z}\right)^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_d\right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_d} \right]^2. \quad (2.129)$$

Знайдемо максимальне значення інтенсивності (2.129) у центральному (нульовому) максимумі, коли $\varphi_d = 0$. Для цього використаємо границю $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = 1$, де $x = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_d$. Тоді $I(0) = \left(\frac{a}{\lambda z}\right)^2$, а нормований розподіл інтенсивності

$$I_n(\varphi_d) = \frac{I(\varphi_d)}{I(0)} = \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_d\right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_d} \right]^2. \quad (2.130)$$

Графік функції $I_n(\varphi_d)$ зображено на рис. 2.18.

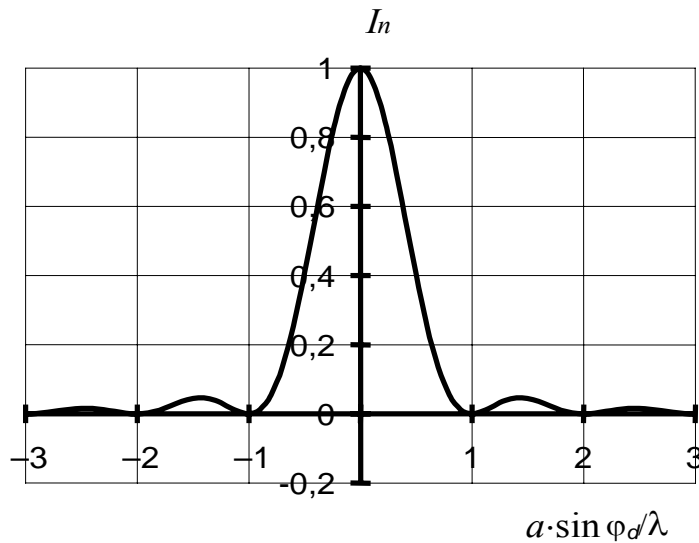


Рис. 2.18. Графік функції (2.130)

Визначимо кути дифракції, які відповідають мінімумам інтенсивності в дифракційній картині функції (2.130), виходячи з рівняння $I_n(\varphi_{d,m}^{min}) = 0$. Використовуючи функцію (2.130), отримаємо рівняння $\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_{d,m}^{min}\right) = 0$. Звідси $\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_{d,m}^{min} = m\pi$ або $a \sin \varphi_{d,m}^{min} = m\lambda$. З цього рівняння знаходимо, що

$$\varphi_{d,m}^{min} = \arcsin\left(m \frac{\lambda}{a}\right). \quad (2.131)$$

Знайдемо кути дифракції, які відповідають максимумам інтенсивності в дифракційній картині за функцією (2.130), виходячи із рівняння $\frac{dI(\varphi_d)}{d\varphi_d} = 0$ або $\frac{d\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right]}{dx} = 0$, де $x = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_d$. Звідси $x = \operatorname{tg} x$ або $\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_{d,m}^{max} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_{d,m}^{max}\right)$.

Розв'язавши це трансцендентне рівняння, можна знайти кути дифракції, що відповідають максимумам. Наприклад, для першого максимуму рівняння має розв'язок $x_1 = 1,43\pi = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi_{d,1}^{max}$. Звідси $\varphi_{d,1}^{max} = \arcsin\left(\frac{a}{1,43\lambda}\right)$.

Приклад 2.3. Екран, на якому відбувається дифракція, має п'ять прямокутних діафрагм (рис. 2.19). Визначте амплітуду поля дифракційної

картини Фраунгофера. Побудуйте графік розподілу інтенсивності цієї картини.

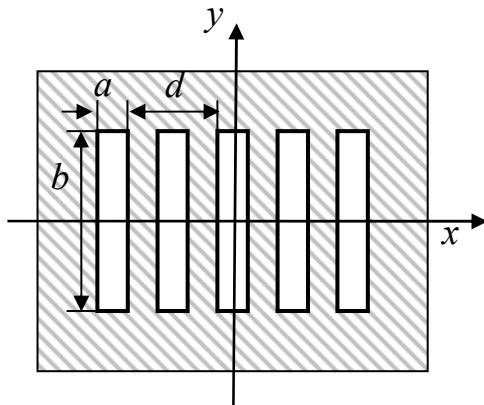


Рис. 2.19. Екран із прямокутних діафрагм, на якому відбувається дифракція

Розв'язання. 1. Розглянемо спочатку дифракцію Фраунгофера (2.65), що формується центральною діафрагмою, яка має амплітудний коефіцієнт пропускання

$$t_0(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ коли } |x| \leq \frac{a}{2}; |y| \leq \frac{b}{2}; \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

Розподіл амплітуди поля в такій дифракційній картині описується функцією (2.71):

$$V_0(x_0, y_0) = \frac{ab}{j\lambda z} \operatorname{sinc}\left(\frac{a}{\lambda z} x_0\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{b}{\lambda z} y_0\right). \quad (2.132)$$

2. Амплітудний коефіцієнт пропускання всього екрана можна подати у вигляді окремих складових:

$$\begin{aligned} t(x, y) &= t_{-2} + t_{-1} + t_0 + t_1 + t_2 = \\ &= t_0(x + 2d, y) + t_0(x + d, y) + t_0(x, y) + t_0(x - d, y) + t_0(x - 2d, y). \end{aligned} \quad (2.133)$$

Якщо екран освітлюється плоскою монохроматичною хвилею однієї амплітуди, то згідно з рівнянням дифракції Фраунгофера (2.65) розподіл амплітуди поля у дифракційній картині визначається перетворенням Фур'є $V(x_0, y_0) = F\{t(x, y)\}$ для просторових частот перетворення (2.61). Підставимо вираз (2.133) у рівняння (2.65) і використаємо теорему зміщення відносно перетворення Фур'є:

$$\begin{aligned} V(x_0, y_0) &= F\{t_0(x, y)\} \times \\ &\times [\exp(j4\pi d v_x) + \exp(j2\pi d v_x) + 1 + \exp(-j2\pi d v_x) + \exp(-j4\pi d v_x)]. \end{aligned} \quad (2.134)$$

Вираз у квадратних дужках являє собою геометричну прогресію зі знаменником $q = \exp(-j2\pi d v_x)$, сума якої

$$\begin{aligned} &\frac{\exp(j4\pi d v_x) - \exp(-j2\pi d v_x) \exp(-j4\pi d v_x)}{1 - \exp(-j2\pi d v_x)} = \\ &= \frac{\exp(-j\pi d v_x) [\exp(j5\pi d v_x) - \exp(-j5\pi d v_x)]}{\exp(-j\pi d v_x) [\exp(j\pi d v_x) - \exp(-j\pi d v_x)]} = \frac{\sin(5\pi d v_x)}{\sin(\pi d v_x)}. \end{aligned}$$

З урахуванням цієї суми, а також перетворення (2.61) і (2.132), амплітуду поля в дифракційній картині виразу (2.134) визначимо як

$$V(x_0, y_0) = \frac{ab}{j\lambda z} \operatorname{sinc}\left(\frac{a}{\lambda z} x_0\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{b}{\lambda z} y_0\right) \left[\frac{\sin(5\pi d v_x)}{\sin(\pi d v_x)} \right]. \quad (2.135)$$

3. Розглянемо приклад розрахунку інтенсивності, коли $d = 2a$, тоді для амплітуди поля (2.135) маємо

$$\begin{aligned} I(x_0, y_0) &= |V|^2 = \left(\frac{ab}{\lambda z}\right)^2 \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{b y_0}{\lambda z}\right) \right]^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{ax_0}{\lambda z}\right)}{\frac{ax_0}{\lambda z}} \right]^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{10\pi ax_0}{\lambda z}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi ax_0}{\lambda z}\right)} \right]^2 = \\ &= \left(\frac{ab}{\lambda z}\right)^2 \left[\operatorname{sinc}\left(\frac{b y_0}{\lambda z}\right) \right]^2 \left[5 \frac{\operatorname{sinc}\left(\frac{10ax_0}{\lambda z}\right)}{\cos\left(\frac{\pi ax_0}{\lambda z}\right)} \right]^2. \end{aligned} \quad (2.136)$$

У центрі дифракційної картини інтенсивність (2.136) становитиме

$$I(0,0) = \left(\frac{5ab}{\lambda z}\right)^2. \quad (2.137)$$

З урахуванням інтенсивності (2.137) одновимірний нормований розподіл інтенсивності вздовж осі x_0 за $y_0 = 0$ подано на рис. 2.20,

$$I_n(x_0, y_0) = \left[\frac{\operatorname{sinc}\left(\frac{10ax_0}{\lambda z}\right)}{\cos\left(\frac{\pi ax_0}{\lambda z}\right)} \right]^2. \quad (2.138)$$

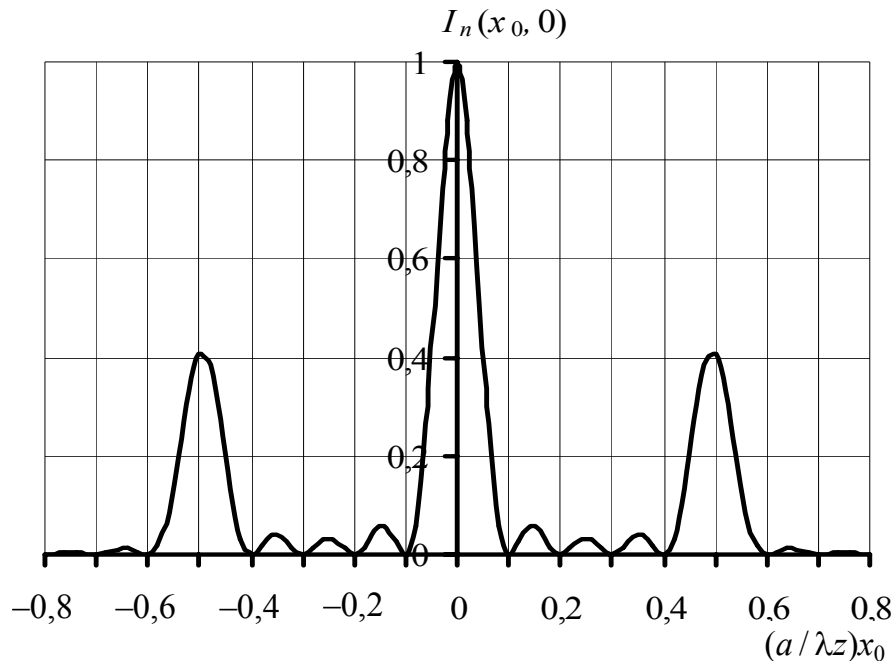


Рис. 2.20. Нормований розподіл інтенсивності під час дифракції Фраунгофера на ґратці (2.138)

З аналізу функції (2.138) видно, що вона має центральний і два бокові головні максимуми. Бокові максимуми розміщені в точках з координатами $(\pm \frac{\lambda z}{2a})$ і мають амплітуду $4/\pi^2$.

Приклад 2.4. Виведіть формулу Релея (2.96), використовуючи співвідношення (2.95).

Розв'язання. Подамо співвідношення (2.95) у вигляді

$$L(R_0) = \frac{2\pi^2 R^2}{(\lambda z)^2} \int_0^{R_0} \left[2 \frac{J_1\left(\frac{2\pi R}{\lambda z} r_0\right)}{\frac{2\pi R}{\lambda z} r_0} \right]^2 r_0 dr_0.$$

Замінімо змінні: $2\pi \frac{R}{\lambda z} r_0 = x$; $r_0 = \frac{\lambda z}{2\pi R} x$; $dr_0 = \frac{\lambda z}{2\pi R} dx$.

Тоді

$$L(R_0) = \frac{2\pi^2 R^2}{(\lambda z)^2} 4 \int_0^{2\pi \frac{R}{\lambda z} R_0} \frac{J_1^2(x)}{x^2} \left(\frac{\lambda z}{2\pi R} \right)^2 x dx = 2 \int_0^{2\pi \frac{R}{\lambda z} R_0} \frac{J_1^2(x)}{x} dx. \quad (2.139)$$

Для обчислення інтеграла (2.139) скористаємося співвідношенням (9.1.27) з довідника [3]:

$$\frac{dJ_1(x)}{dx} = J_0(x) - \frac{1}{x} J_1(x). \quad (2.140)$$

Помножимо праву і ліву частини рівняння (2.140) на $J_1(x)$:

$$J_1(x) \frac{dJ_1(x)}{dx} = J_1(x) J_0(x) - \frac{1}{x} J_1^2(x). \quad (2.141)$$

Із співвідношення (2.91) за $n = 0$ маємо

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x). \quad (2.142)$$

Із системи рівнянь (2.141) і (2.142) отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} J_1^2(x) &= J_1(x) J_0(x) - J_1(x) \frac{dJ_1(x)}{dx} = \\ &= -J_0(x) \frac{dJ_0(x)}{dx} - J_1(x) \frac{dJ_1(x)}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} [J_0^2(x) + J_1^2(x)]. \end{aligned} \quad (2.143)$$

Підставимо співвідношення (2.143) в інтеграл (2.139):

$$L(R_0) = - \int_0^{2\pi \frac{R}{\lambda z} R_0} d[J_0^2(x) + J_1^2(x)] = 1 - J_0^2\left(2\pi \frac{R}{\lambda z} R_0\right) - J_1^2\left(2\pi \frac{R}{\lambda z} R_0\right). \quad (2.144)$$

Отриманий вираз (2.144) збігається з формулою Релея (2.96).

Приклад 2.5. Форму отвору в екрані показано на рис. 2.21. Екран освітлюється плоскою монохроматичною хвилею одиничної амплітуди

з довжиною хвилі λ . Визначте комплексну амплітуду та інтенсивність поля у точці $x_0 = y_0 = 0$, якщо дифракція Френеля спостерігається на відстані z за екраном.

Розв'язання. Амплітуду поля під час дифракції Френеля визначають за формулою (2.56). У центрі дифракційної картини, коли $x_0 = y_0 = 0$, ця формула матиме вигляд

$$V(0,0) = \frac{1}{j\lambda z} \times \iint_{-\infty}^{\infty} V(x,y) \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2) \right] dx dy. \quad (2.145)$$

Нехай екран має амплітудний коефіцієнт пропускання $t(x,y)$.

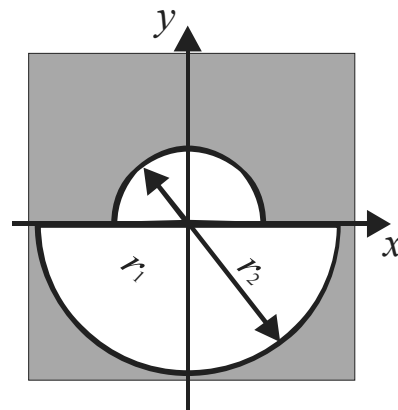


Рис. 2.21. До прикладу 2.5

Тоді амплітуду поля безпосередньо за екраном можна знайти за виразом

$$V(x,y) = V_0 t(x,y) = t(x,y). \quad (2.146)$$

Підставимо вираз (2.146) у формулу (2.145), отримаємо

$$V(0,0) = \frac{1}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} t(x,y) \cos \left[\frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2) \right] dx dy + \frac{1}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} t(x,y) \sin \left[\frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2) \right] dx dy = \frac{1}{\lambda z} (I_s - jI_c). \quad (2.147)$$

Щоб обчислити функцію (2.147) перейдемо до полярної системи координат r, φ : $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $dx dy = r dr d\varphi$, $x^2 + y^2 = r^2$. Використовуючи рис. 2.21, запишемо амплітудний коефіцієнт пропускання екрана у полярній системі координат:

$$t(x,y) = t(r,\varphi) = \begin{cases} 1, \text{ коли } 0 \leq r \leq r_1, 0 \leq \varphi \leq \pi; \\ 1, \text{ коли } 0 \leq r \leq r_2, \pi \leq \varphi \leq 2\pi; \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \quad (2.148)$$

Тоді

$$\begin{aligned} I_c &= \int_0^{r_1} \int_0^\pi \cos \left(\frac{\pi}{\lambda z} r^2 \right) r dr d\varphi + \int_0^{r_2} \int_\pi^{2\pi} \cos \left(\frac{\pi}{\lambda z} r^2 \right) r dr d\varphi = \\ &= \frac{\lambda z}{2\pi} \int_0^{r_1} \int_0^\pi \cos \left(\frac{\pi}{\lambda z} r^2 \right) d \left(\frac{\pi}{\lambda z} r^2 \right) d\varphi + \int_0^{r_2} \int_\pi^{2\pi} \cos \left(\frac{\pi}{\lambda z} r^2 \right) d \left(\frac{\pi}{\lambda z} r^2 \right) d\varphi = \\ &= \frac{\lambda z}{2} \left[\sin \left(\frac{\pi}{\lambda z} r_1^2 \right) + \sin \left(\frac{\pi}{\lambda z} r_2^2 \right) \right]; \end{aligned} \quad (2.149)$$

$$I_s = \int_0^{r_1} \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{\pi}{\lambda z} r^2\right) r dr d\varphi + \int_0^{r_2} \int_{\pi}^{2\pi} \sin\left(\frac{\pi}{\lambda z} r^2\right) r dr d\varphi =$$

$$= -\frac{\lambda z}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_1^2\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_2^2\right) \right]. \quad (2.150)$$

Підставимо інтеграли (2.149) і (2.150) у функцію (2.147):

$$V(0,0) = -\frac{1}{2} \left\{ \left[\cos\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_1^2\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_2^2\right) \right] + j \left[\sin\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_1^2\right) + \sin\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_2^2\right) \right] \right\}. \quad (2.151)$$

Інтенсивність поля в точці $x_0 = y_0 = 0$ для амплітуди поля (2.151) знаходять за формулою

$$I(0,0) = \frac{1}{4} \left\{ \left[\cos\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_1^2\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_2^2\right) \right]^2 + \left[\sin\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_1^2\right) + \sin\left(\frac{\pi}{\lambda z} r_2^2\right) \right]^2 \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos \left[\frac{\pi}{\lambda z} (r_2^2 - r_1^2) \right] \right\}. \quad (2.152)$$

Приклад 2.6. Знайдіть інтенсивність світлового поля в центрі картини дифракції Френеля, що відбувається на отворі, який освітлюється нормально падаючою плоскою хвилею одиничної амплітуди, якщо його коефіцієнт пропускання

$$t(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ коли } 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R; \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \quad (2.153)$$

Розв'язання. Запишемо рівняння дифракції Френеля (2.56) для центра дифракційної картини, коли $x_0 = y_0 = 0$,

$$V(0,0) = \frac{1}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} V(x,y) \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2) \right] dx dy. \quad (2.154)$$

Якщо на екран нормально падає плоска монохроматична хвиля одиничної амплітуди $V_0 = 1$, то для функції (2.153) амплітуда поля безпосередньо за екраном

$$V(x,y) = V_0 t(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ коли } 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq R; \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \quad (2.155)$$

У зв'язку з тим, що функція (2.155) вісесиметрична, запишемо її й рівняння дифракції Френеля (2.154) у полярній системі координат. Замінімо змінні: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $dx dy = r dr d\varphi$. Тоді

$$V(x,y) = V(r) = \begin{cases} 1, \text{ коли } 0 \leq r \leq R; \\ 0 \text{ в інших випадках;} \end{cases} \quad (2.156)$$

$$V(0) = \frac{1}{j\lambda z} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} V(r) \exp \left(j \frac{\pi}{\lambda z} r^2 \right) r dr d\varphi. \quad (2.157)$$

Підставимо функцію (2.156) у рівняння (2.157):

$$V(0) = \frac{2\pi}{j\lambda z} \int_0^R \exp\left(j \frac{\pi}{\lambda z} r^2\right) r dr. \quad (2.158)$$

Для розрахунку (2.158) скористаємося табличним інтегралом (1.3.3.7) з довідника [3]:

$$\int e^{-ax^2} x dx = -\frac{1}{2a} e^{-ax^2}, \quad (2.159)$$

де $x = r$; $a = -j \frac{\pi}{\lambda z}$.

Використовуючи інтеграл (2.159), маємо

$$\begin{aligned} V(0) &= \frac{2\pi}{j\lambda z} \left(\frac{\lambda z}{2j\pi} \right) \exp\left(j \frac{\pi}{\lambda z} r^2\right) \Big|_0^R = 1 - \exp\left(j \frac{\pi}{\lambda z} R^2\right) = \\ &= 1 - \cos\left(\frac{\pi}{\lambda z} R^2\right) - j \sin\left(\frac{\pi}{\lambda z} R^2\right). \end{aligned} \quad (2.160)$$

За умови (2.160) інтенсивність світла у точці $x_0 = y_0 = 0$

$$I(0,0) = |V|^2 = \left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{\lambda z} R^2\right)\right]^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda z} R^2\right) = 4\sin^2\left(\frac{\pi R^2}{2\lambda z}\right).$$

2.10. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 2.1. Плоска монохроматична хвиля ($\lambda = 0,5$ мкм) з інтенсивністю I_0 нормально падає на діафрагму з круглим отвором діаметром 2 мм. Знайдіть відстані b_1, b_2, b_3, \dots від діафрагми до точок P_1, P_2, P_3, \dots , для яких в отворі вміщується 1, 2, 3, ... зони Френеля відповідно. Побудуйте наближено графік залежності інтенсивності у точці спостереження $I(b)$.

Відповідь:

q	1	2	3	4	5	∞
b_q , см	200	100	66	50	40	0
$I(b)$	$4I_0$	Приблизно 0	Менше $4I_0$	Більше 0	Менше $4I_0$	I_0

Задача 2.2. На шляху плоскої світлової хвилі з $\lambda = 589$ нм встановлено фокусувальну лінзу з фокусною відстанню $f = 300$ мм. Безпосередньо за лінзою розміщено діафрагму з круглим отвором, а на відстані $b = 1$ м від цієї діафрагми перебуває екран. Знайдіть мінімальний радіус

отвору у діафрагмі, за якого у точці спостереження на екрані буде максимум освітленості.

Вказівка. Скористайтесь прикладом 2.1.

$$\text{Відповідь: } R_1 = \sqrt{\frac{fb}{b-f}} \lambda = 0,5 \text{ мм.}$$

Задача 2.3. Між точковим джерелом монохроматичного світла з довжиною хвилі λ та екраном розмістили діафрагму з круглим отвором, радіус якого може змінюватись у процесі досліду. Відстань від діафрагми до джерела $r_0 = 1000$ мм, а відстань від діафрагми до екрана $b = 1500$ мм. Знайдіть довжину хвилі світла λ , якщо максимум освітленості у центрі дифракційної картини спостерігається за радіуса отвору в діафрагмі $R_1 = 1$ мм, а наступний максимум – за $R_2 = 1,58$ мм.

$$\text{Відповідь: } \lambda = \frac{(R_2^2 - R_1^2)(r_0 + b)}{2r_0 b} = 1,25 \text{ мкм.}$$

Задача 2.4. Основна фокусна відстань зонної пластинки Френеля $f_1 = R_1^2 / \lambda$, тобто в радіусі R_1 розміщується лише перша зона. Знайдіть її інші фокусні відстані.

$$\text{Відповідь: } f_q = \frac{f_1}{2q+1}.$$

Задача 2.5. Точкове джерело світла з двома монохроматичними лініями $\lambda_1 = 560$ нм і $\lambda_2 = 280$ нм однакової інтенсивності розміщено на відстані $L = 1$ м від екрана. Перед екраном на відстані $a = 0,2$ м встановлено прозорий диск діаметром $D = 0,6$ мм, який вносить фазову затримку у π разів для обох компонентів. Джерело світла, центри диска та екрана розміщені на одній осі. Як залежить інтенсивність світла у центрі екрана від наявності екрана?

$$\text{Відповідь: } I_{01} = I_{02} = \frac{1}{2} I_0;$$

$$q_1 = 1, V_1(P) = -\frac{3}{2} V_{11}, I_1 = 9 I_{01};$$

$$q_2 = 2, V_2(P) = -\frac{3}{2} V_1 + V_2 \approx -\frac{1}{2} V_{12}, I_2 = I_{02}, I(P) = I_1 + I_2 = 5 I_0.$$

Задача 2.6. Між точковим джерелом монохроматичного світла і точкою спостереження перпендикулярно лінії, яка з'єднує їх, встановлено непрозорий екран, що складається із двох кругів (рис. 2.22). Радіус одного з них відповідає першій зоні Френеля, а радіус другого – другій зоні Френеля. Визначте інтенсивність світла у точці спостереження, якщо, коли немає екрана, вона дорівнює I_0 .

Відповідь: $V(P) = -\frac{1}{4}V_2 + V_3 - V_4 + \dots \approx \frac{1}{4}V_1$; $I(P) = \frac{1}{4}I_0$.

Задача 2.7. Вдалині від точкового джерела S встановлено нескінченний екран, який ідеально відбиває світло. З екрана вилучено диск діаметром $D_1 = 2R_1\sqrt{2/3}$, де R_1 – радіус першої зони Френеля, і встановлено інший диск діаметром $D_2 = R_1\sqrt{2}$ (рис. 2.23). Знайдіть у точці S інтенсивність світла $I(S)$, що відбилося від екрана, якщо диск діаметром D_2 розміщений у площині екрана.

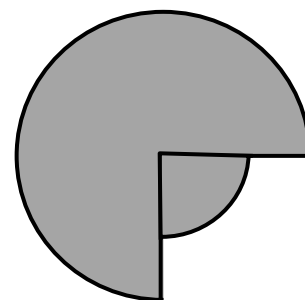


Рис. 2.22. До задачі 2.6

Відповідь: Інтенсивність світла у точці S формується всіма зонами Френеля за винятком непрозорої частини першої зони. Частка площі непрозорої частини першої зони становить $\frac{D_1^2 - D_2^2}{4R_1^2} = \frac{1}{6}$,

$$V(S) = \frac{5}{6}V - V_2 + V_3 - \dots \approx \frac{1}{6}V_1 + \frac{1}{2}V_1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}V_1\right); I(S) = \frac{4}{9}I_0.$$

Задача 2.8. Фазова зонна пластинка виготовлена з матеріалу з показником заломлення $n = 1,5$. Яку мінімальну висоту h мають мати виступи над парними (або непарними) зонами пластинки для довжини хвилі $\lambda_0 = 500$ нм?

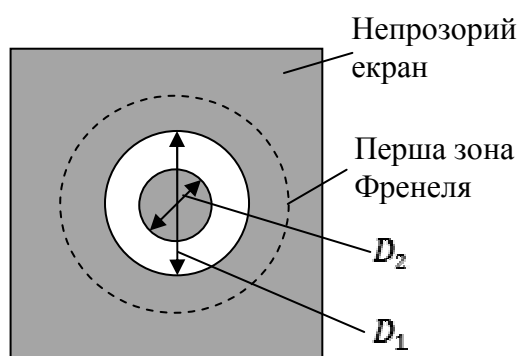


Рис. 2.23. До задачі 2.7

Відповідь: $h = \frac{\lambda_0}{2(n-1)} = 500$ нм.

Задача 2.9. Виведіть вираз для розподілу інтенсивності у картині дифракції Фраунгофера на отворі, який зображено на рис. 2.24. Вважається,

що отвір освітлюється нормально падаючою плоскою хвилею, амплітуда якої дорівнює одиниці.

Відповідь:

$$I(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{\lambda z}\right)^2 \left[L^2 \operatorname{sinc}\left(\frac{Lx_0}{\lambda z}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{Ly_0}{\lambda z}\right) - l^2 \operatorname{sinc}\left(\frac{lx_0}{\lambda z}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{ly_0}{\lambda z}\right) \right]^2.$$

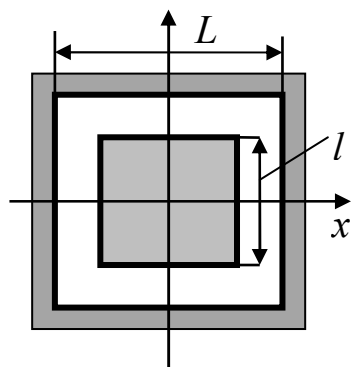


Рис. 2.24. До задачі 2.9

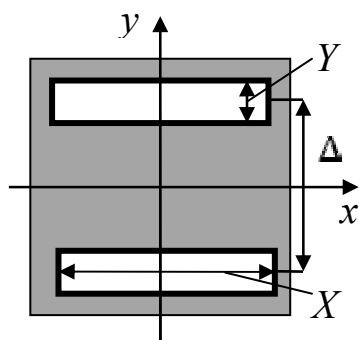


Рис. 2.25. До задачі 2.10

Задача 2.10. Екран освітлює нормально падаюча монохроматична хвиля, амплітуда якої дорівнює одиниці. Знайдіть розподіл інтенсивності у дифракційній картині Фраунгофера на двох щілинах (рис. 2.25). Побудуйте графіки нормованого розподілу вздовж осей x_0 та y_0 площини спостереження, якщо $\frac{X}{\lambda z} = 10 \text{ м}^{-1}$; $\frac{Y}{\lambda z} = 1 \text{ м}^{-1}$; $\frac{\Delta}{\lambda z} = 1,5 \text{ м}^{-1}$, де λ – довжина хвилі; z – відстань від екрана до площини спостереження.

$$\text{Відповідь: } I(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^4 \left\{ X \operatorname{sinc}\left(\frac{Xx_0}{\lambda z}\right) \times \right. \\ \left. \times \left[(\Delta + Y) \operatorname{sinc}\left(\frac{(\Delta + Y)y_0}{\lambda z}\right) - (\Delta - Y) \operatorname{sinc}\left(\frac{(\Delta - Y)y_0}{\lambda z}\right) \right]^2 \right\};$$

$$I(0,0) = \left[\frac{2XY}{(\lambda z)^2} \right]^2;$$

$$I_n(x_0, y_0) = \frac{I(x_0, y_0)}{I(0,0)} = \{ \operatorname{sinc}(10x_0) [1,25 \operatorname{sinc}(2,5y_0) - (\Delta - Y) \operatorname{sinc}(0,25y_0)] \}^2.$$

Задача 2.11. На екран із круглим отвором діаметром 40 мм нормально падає плоска монохроматична хвиля, довжина якої становить 0,5 мкм, а амплітуда дорівнює одиниці. Знайдіть розподіл інтенсивності у дифракційній картині Фраунгофера, якщо фокусна відстань фокусувальної лінзи становить 100 мм. Побудуйте графік цього розподілу.

$$\text{Відповідь: } I_n(r_0) = \left[\frac{2J_1\left(\frac{2\pi \cdot 20}{0,5 \cdot 10^3 \cdot 100} r_0\right)}{\frac{2\pi \cdot 20}{0,5 \cdot 10^3 \cdot 100} r_0} \right]^2 = \left[\frac{2J_1(2,5r_0)}{2,5r_0} \right]^2,$$

де r_0 вимірюється у мкм.

Задача 2.12. Екран із круглим кільцевим отвором із зовнішнім і внутрішнім радіусами $R_1 = 20$ мм та $R_2 = 10$ мм освітлюється нормально падаючою монохроматичною хвилею, довжина якої становить 0,5 мкм, а амплітуда дорівнює одиниці. Знайдіть розподіл інтенсивності в дифракційній картині Фраунгофера, якщо фокусна відстань фокусувальної лінзи становить 100 мм. Побудуйте графік нормованого розподілу інтенсивності.

Відповідь:

$$I_n(r_0) = \frac{I(r_0)}{I(0)} = \left(\frac{1}{R_1^2 - R_2^2} \right)^2 \left[R_1^2 \frac{2J_1\left(\frac{2\pi R_1 r_0}{\lambda f}\right)}{\frac{2\pi R_1}{\lambda f} r_0} - R_2^2 \frac{2J_1\left(\frac{2\pi R_2 r_0}{\lambda f}\right)}{\frac{2\pi R_2}{\lambda f} r_0} \right]^2.$$

Задача 2.13. Визначте нормовану інтенсивність дифракційної картини Фраунгофера, якщо плоска хвиля одиничної амплітуди нормально падає на екран із кільцевою діафрагмою з радіусами $2R$ та R . Отриманий результат порівняйте з дифракцією Фраунгофера на круглому отворі з радіусом $2R$. Побудуйте відповідні графіки нормованої інтенсивності за $R = 10$ мм.

Відповідь:
$$I_n(r_0) = \frac{I(r_0)}{I(0)} = \frac{1}{9} \left[4 \frac{2J_1\left(\frac{4\pi R}{\lambda f} r_0\right)}{\frac{4\pi R}{\lambda f} r_0} - \frac{2J_1\left(\frac{2\pi R}{\lambda f} r_0\right)}{\frac{2\pi R}{\lambda f} r_0} \right]^2.$$

Задача 2.14. Знайдіть розподіл поля в дифракційній картині Фраунгофера на синусоїдальній фазовій ґратці, яка має комплексний амплітудний коефіцієнт пропускання,

$$t(x, y) = \exp\left[j \frac{m}{2} \sin(2\pi \nu_0 x)\right] \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{b}\right),$$

де m – глибина фазової модуляції; ν_0 – просторова частота ґратки.

Відповідь:

$$V(x_0, y_0) = \left(\frac{ab}{\lambda z}\right)^2 \text{sinc}\left(\frac{b y_0}{\lambda z}\right) \sum_{n=0}^{\infty} J_n(m) \text{sinc}\left[\frac{a}{\lambda z}(x_0 + \lambda z n \nu_0)\right] \left(\frac{a x_0}{\lambda z}\right),$$

де J_n – функція Бесселя n -го порядку; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Задача 2.15. Екран, на якому відбувається дифракція Фраунгофера, являє собою прямокутну ґратку із $n \times m$ ідентичних круглих діафрагм

з радіусом R , розміщених як показано на рис. 2.26. Визначте інтенсивність відповідної картини дифракції.

Відповідь:

$$I(x, y) = \left(\frac{\pi R^2 V_0}{\lambda z} \right)^2 \left[\frac{2 J_1 \left(\frac{2\pi R}{\lambda z} \sqrt{x^2 + y^2} \right)}{\frac{2\pi R}{\lambda z} \sqrt{x^2 + y^2}} \right]^2 \left[\frac{\sin \left(\frac{\pi a}{\lambda z} x_0 \right) \sin \left(\frac{\pi b}{\lambda z} y_0 \right)}{\sin \left(\frac{\pi a}{\lambda z} x_0 \right) \sin \left(\frac{\pi b}{\lambda z} y_0 \right)} \right]^2.$$

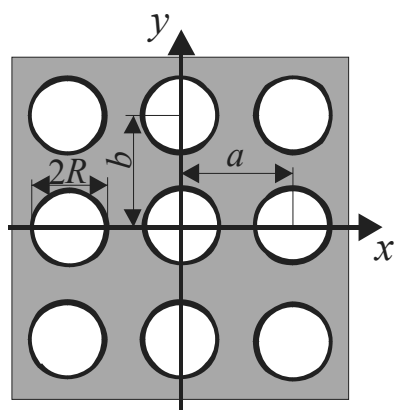


Рис. 2.26. До задачі 2.15

яка описує розподіл інтенсивності у дифракційній картині Фраунгофера. Побудуйте графік нормованого розподілу інтенсивності $I(y_0)$.

Вказівка: Скористайтесь рівнянням дифракції Фраунгофера (2.65) для одновимірного випадку. Для визначення амплітуди падаючої хвилі у площині екрана використайте рівняння плоскої монохроматичної хвилі (1.18).

Відповідь: $I_n(y_0) = \text{sinc}^2 \left[\frac{\pi b}{\lambda f} (f \sin \varepsilon - y_0) \right].$

Задача 2.17. Форму отвору в екрані показано на рис. 2.27. Екран освітлюється плоскою монохроматичною хвилею одиничної амплітуди довжиною $\lambda = 0,5$ мкм. Знайдіть комплексну амплітуду та інтенсивність поля в точці $x_0 = y_0 = 0$, якщо дифракція Френеля спостерігається на відстані $z = 2$ м за екраном.

Вказівка: Скористайтесь прикладом 2.5.

Відповідь: $V(0,0) = 1 - \frac{3}{4} \exp \left(j \frac{\pi}{\lambda z} r_1^2 \right) - \frac{1}{4} \exp \left(j \frac{\pi}{\lambda z} r_2^2 \right) = 1,5,$

де $r_1 = 1$ мм і $r_2 = 2$ мм; $I(0,0) = |V(0,0)|^2 = 2,25.$

Задача 2.18. Виконайте перетворення (2.60), яке визначає передавальну функцію Френеля.

Задача 2.19. Доведіть, що передавальна функція дифракції Френеля (2.60) є окремим випадком передавальної функції вільного простору (1.40) з урахуванням обмежень (2.54), зумовлених дифракцією Френеля.

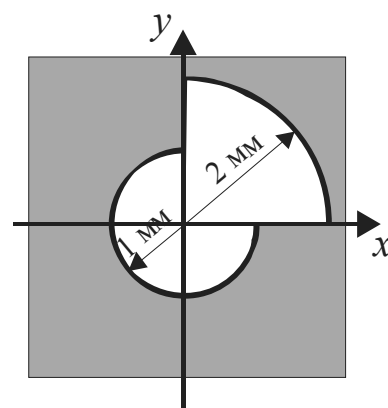


Рис. 2.27. До задачі 2.17

Задача 2.20. Отвір Σ у непрозорому екрані освітлюється сферичною хвилею, яка збігається в точці P , розміщеній у площині, що паралельна екрану і перебуває на відстані z за отвором (рис. 2.27). Знайдіть квадратичне наближення хвильового фронту падаючої хвилі у площині отвору. Вважаючи, що дифракція Френеля на отворі спостерігається в площині, яка містить точку P_0 , покажіть, що розподіл інтенсивності являє собою дифракційну картину Фраунгофера на отворі з центром у точці P .

$$\text{Відповідь: } V(x, y, z) \approx \frac{V_0}{z} \exp(-jkz) \exp \left\{ -j \frac{\pi}{\lambda z} [(y - Y_0)^2 + x^2] \right\};$$

$$V(x_0, y_0) \sim \iint_{\Sigma} \exp \left\{ -j \frac{2\pi}{\lambda z} [x_0 x + (y_0 - Y_0) y] \right\} dx dy.$$

Задача 2.21. Плоска хвиля одиничної амплітуди довжиною $\lambda = 0,5$ мкм нормально падає на півплощину. Користуючись виразом (2.123), визначте положення максимумів і мінімумів дифракційної картини на відстані $z = 2$ м за екраном.

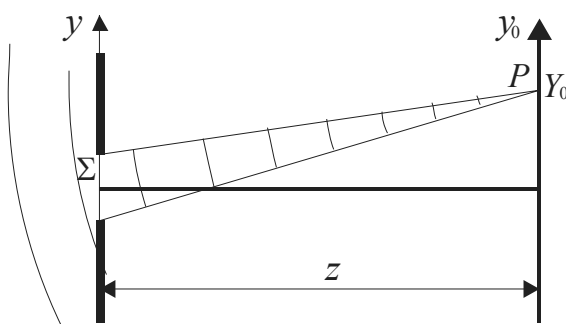


Рис. 2.28. До задачі 2.20

$$\text{Відповідь: } x_{0,max} = -0,86; -1,66; -2,18 \text{ мм};$$

$$x_{0,min} = -1,33; -1,94; -2,40 \text{ мм}.$$

Задача 2.22. Знайдіть інтенсивність світлового поля на осі картини дифракції Френеля на отворі, який освітлюється нормально падаючою

плоскою хвилею одиничної амплітуди, якщо його коефіцієнт пропускання

$$t(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ коли } a \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1; \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

Вказівка: Скористайтесь прикладом 2.6.

Відповідь: $I(0,0) = \left(\frac{2\pi}{\lambda z}\right)^2 \sin^2 \left[\frac{\pi}{2\lambda z}(1 - a^2)\right]$.

Задача 2.23. Отвір екрана освітлюється нормально падаючою плоскою хвилею одиничної амплітуди. Знайдіть картину дифракції Френеля на нескінченному отворі, який має амплітудний коефіцієнт пропускання $t(x, y) = \frac{1}{2} [1 + m \sin(2\pi v_0 x)]$, де $0 < m < 1$.

Відповідь:

$$I(x_0, y_0) = \frac{1}{4} + \frac{m^2}{16} \left\{ \exp \left[-j \frac{2\pi}{\lambda z} (x_0 - v_0 \lambda z)^2 \right] - \exp \left[-j \frac{2\pi}{\lambda z} (x_0 + v_0 \lambda z)^2 \right] \right\}^2.$$

РОЗДІЛ 3. ДИФРАКЦІЙНИЙ АНАЛІЗ ОПТИЧНИХ СИСТЕМ

Основним елементом більшості оптичних систем є сферична лінза. Із геометричної оптики відомо, що найчастіше лінзи використовують для формування зображення. Але поряд з цим лінзи можна використовувати для здійснення фазових перетворень і перетворень Фур'є.

У цьому розділі розглянуто властивості лінзи на основі скалярної теорії дифракції. При цьому процес перетворення Фур'є, який виконується лінзою, не можна розглядати з погляду геометричної оптики.

3.1. Тонка лінза як елемент, що виконує фазове перетворення

Лінзу називають *тонкою*, якщо промінь, що падає на одну поверхню лінзи в точці з координатами (x, y) , виходить з другої поверхні в точці майже з такими самими координатами. Іншими словами, поперечними зміщеннями променів у тонкій лінзі можна знехтувати. З погляду геометричної оптики це означає, що головні площини H і H' збігаються. Отже, тонка лінза просто затримує фронт падаючої хвилі на значення, пропорційне товщині $d(x, y)$ лінзи у кожній точці.

Припустимо, що $V(x, y)$ і $V'(x, y)$ – комплексні амплітуди світлового поля у площинах 1 та 2, перпендикулярних до оптичної осі Z і дотичних до сферичних поверхонь лінзи (рис. 3.1). Тоді

$$V'(x, y) = V(x, y)t_l(x, y), \quad (3.1)$$

де $t_l(x, y)$ – комплексний амплітудний коефіцієнт пропускання лінзи.

Якщо не враховувати втрати випромінювання за рахунок френелівських втрат на відбиття та поглинання у лінзі, то

$$t_l(x, y) = \exp[j\phi_l(x, y)], \quad (3.2)$$

де $\phi_l(x, y)$ – фазове зміщення у точці з координатами (x, y) , яке вносить лінза.

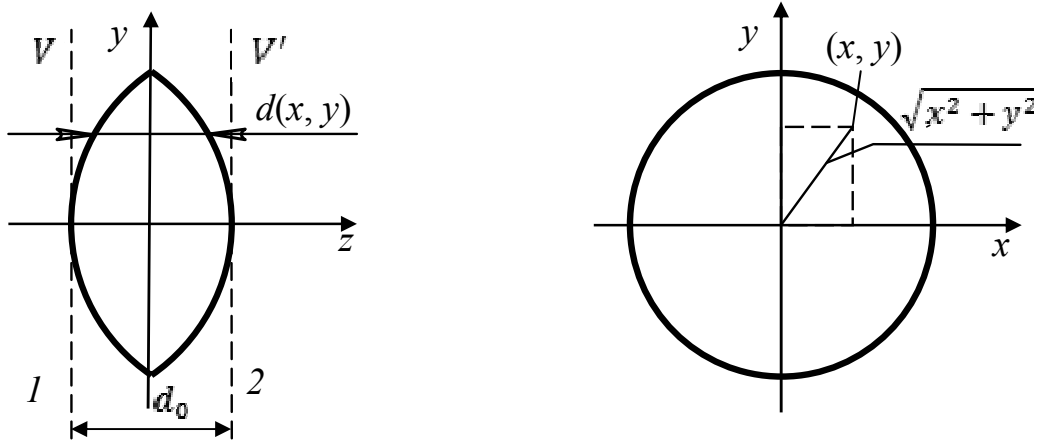


Рис. 3.1. Тонка сферична лінза

Визначимо фазове зміщення $\varphi_l(x, y)$. Для цього відстань між площинами 1 і 2, яка дорівнює максимальній товщині лінзи d_0 на оптичній осі, можна подати у вигляді

$$d_0 = d(x, y) + [d_0 - d(x, y)], \quad (3.3)$$

де $[d_0 - d(x, y)]$ – товщина повітряного простору між поверхнями лінзи й площинами 1 та 2.

Тоді фазове зміщення з урахуванням (3.3) подамо у вигляді

$$\varphi_l(x, y) = kn d(x, y) + k[d_0 - d(x, y)], \quad (3.4)$$

де k – хвильове число, $k = 2\pi/\lambda$; n – показник заломлення лінзи.

Підставимо рівняння (3.4) у вираз (3.2). Тоді амплітудний коефіцієнт пропускання лінзи знайдемо за формулою

$$t_l(x, y) = \exp(jkd_0) \exp[jk(n - 1)d(x, y)]. \quad (3.5)$$

Визначимо функцію товщини лінзи $d(x, y)$ залежно від основних параметрів лінзи. Подамо лінзу у вигляді двох частин (рис. 3.2), для яких

$$d(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y); \quad d_0 = d_{10} + d_{20}. \quad (3.6)$$

Із рис. 3.2 знаходимо, що

$$d_1(x, y) = d_{01} - [r_1 - \sqrt{r_1^2 - (x^2 + y^2)}] = d_{01} - r_1 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{r_1^2}} \right]; \quad (3.7)$$

$$d_2(x, y) = d_{02} - [-r_2 + \sqrt{r_2^2 - (x^2 + y^2)}] = d_{02} + r_2 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{r_2^2}} \right]. \quad (3.8)$$

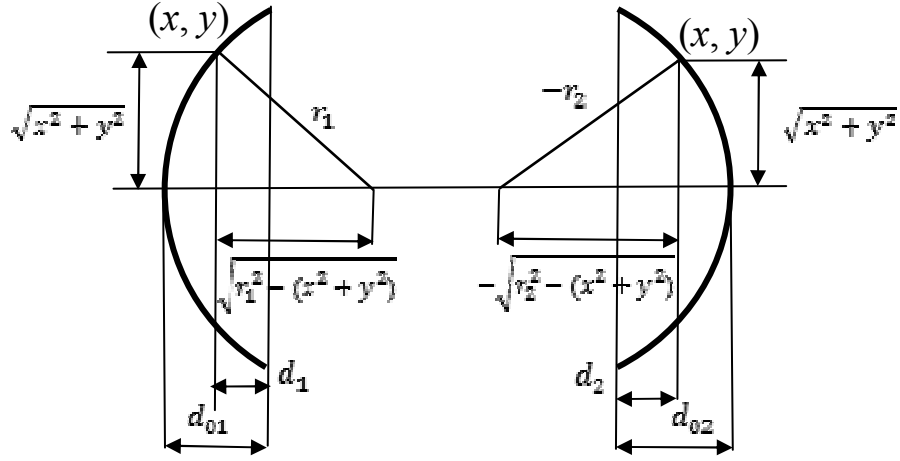


Рис. 3.2. До визначення функції товщини лінзи $d(x, y)$

Підставимо формули (3.7) і (3.8) у вираз (3.6):

$$d(x, y) = d_0 - r_1 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{r_1^2}} \right] + r_2 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{r_2^2}} \right]. \quad (3.9)$$

Щоб спростити математичні перетворення, розглянемо параксіальну область поблизу оптичної осі, для якої

$$\frac{x^2 + y^2}{r_1^2} \ll 1; \quad \frac{x^2 + y^2}{r_2^2} \ll 1. \quad (3.10)$$

Тоді

$$\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{r_1^2}} \approx 1 - \frac{x^2 + y^2}{2r_1^2}; \quad \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{r_2^2}} \approx 1 - \frac{x^2 + y^2}{2r_2^2}. \quad (3.11)$$

Підставимо співвідношення (3.11) у вираз (3.9). Тоді функція товщини лінзи $d(x, y)$ матиме вигляд

$$d(x, y) = d_0 - \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (3.12)$$

Слід звернути увагу на те, що параксіальне наближення рівняння (3.11) дає приблизно такий самий результат, як і у разі зміни сферичних поверхонь лінзи на параболічні.

Підставивши рівняння (3.12) у вираз (3.5), отримаємо параксіальне наближення амплітудного коефіцієнта пропускання лінзи:

$$t_l(x, y) = \exp(jknd_0) \exp \left[-jk(n-1) \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \right]. \quad (3.13)$$

Множник $\exp(jknd_0)$ у формулі (3.13) вносить сталу фазову затримку, тому його можна не враховувати.

Параметри лінзи об'єднаємо у вигляді

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad (3.14)$$

де f – фокусна відстань лінзи, яку в геометричній оптиці також знаходять за формулою (3.14).

Отже, фазові перетворення, що виконує додатна лінза, можна подати у вигляді

$$t_l(x, y) = \exp \left[-j \frac{k}{2f} (x^2 + y^2) \right]. \quad (3.15)$$

Щоб краще розуміти фізичний зміст фазового перетворення (3.15), яке виконує сферична лінза, розглянемо дію лінзи на нормально падаючу плоску хвилю з амплітудою V_0 . Використовуючи вираз (3.1) і перетворення (3.15), знаходимо комплексну амплітуду поля за лінзою:

$$V'(x, y) = V_0 \exp \left[-j \frac{k}{2f} (x^2 + y^2) \right]. \quad (3.16)$$

Розглянемо рівняння сферичної хвилі, що сходиться, (1.23) у параксіальному наближенні, тобто у випадку, коли виконується умова (2.29), тоді рівняння (1.23) матиме вигляд

$$V(x, y, z) = \frac{V(0)}{r} \exp(-jkr) = \frac{V(0)}{r} \exp \left\{ -jkz \left[1 + \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2z^2} \right] \right\}. \quad (3.17)$$

Визначаємо рівняння сферичної хвилі у точці, розміщеній на відстані $z = f$, після чого вираз (3.17) набуде вигляду

$$V(x, y, f) = \frac{V(0)}{r} \exp(-jkz) \exp \left[-j \frac{k}{2f} (x^2 + y^2) \right]. \quad (3.18)$$

Порівнюючи вирази (3.16) і (3.18) бачимо, що тонка додатна сферична лінза перетворює плоску хвилю у сферичну, яка збігається у фокусі лінзи (рис. 3.3, а). Якщо фокусна відстань від'ємна (від'ємна лінза), то сферична хвиля розходить з точки на осі лінзи, розміщеній на відстані f перед лінзою (рис. 3.3, б).

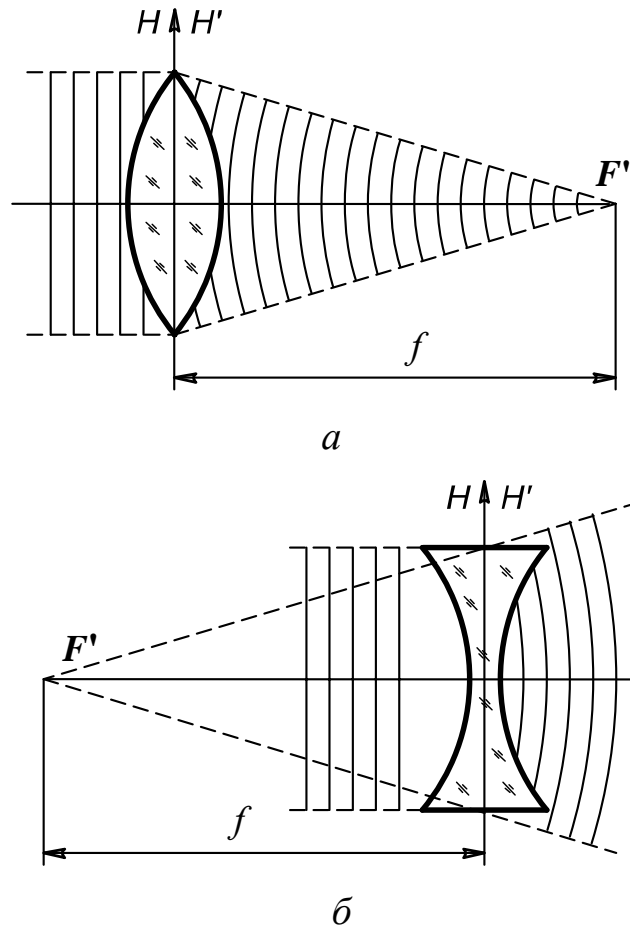


Рис. 3.3. Дія додатної лінзи (а) і від'ємної лінзи (б)
на нормальну падаючу плоску хвилю

Отже, твердження про те, що сферична лінза перетворює падаючу плоску хвилю у сферичну, справедливе лише у параксіальному наближенні. Якщо умова (3.10) не виконується, то, навіть якщо сферичні поверхні лінз бездоганні, фронт хвилі на виході матиме відхилення від ідеальної сферичності, які називають *абераціями*.

Але на практиці фазове перетворення (3.15) має більш загальний характер, ніж можна чекати за умов параксіального наближення. Аналіз багатьох високоякісних оптичних систем (об'єктивів), виконаний на основі геометричної оптики, показує, що для них з достатньою мірою точності справедлива функція (3.15).

3.2. Лінза як елемент, що виконує перетворення Фур'є

Однією з основних і важливих властивостей тонкої додатної лінзи є її здатність виконувати двовимірне перетворення Фур'є. В електронних системах для здійснення перетворення Фур'є використовують складні дорогі спектроаналізатори або комп'ютери. Водночас складна операція перетворення Фур'є у когерентній оптичній системі виконується дуже просто за рахунок явища дифракції світла з урахуванням фазового перетворення тонкої лінзи. При цьому двовимірний сигнал являє собою тонкий транспарант, який характеризується амплітудним коефіцієнтом пропускання.

3.2.1. Поширення монохроматичного випромінювання через оптичну систему

Розглянемо процес проходження когерентного випромінювання через оптичну систему з чотирма площинами, в яких розміщені: 1 – джерело випромінювання; 2 – вхідний транспарант; 3 – додатна тонка лінза; 4 – площина спостереження (екран) (рис. 3.4).

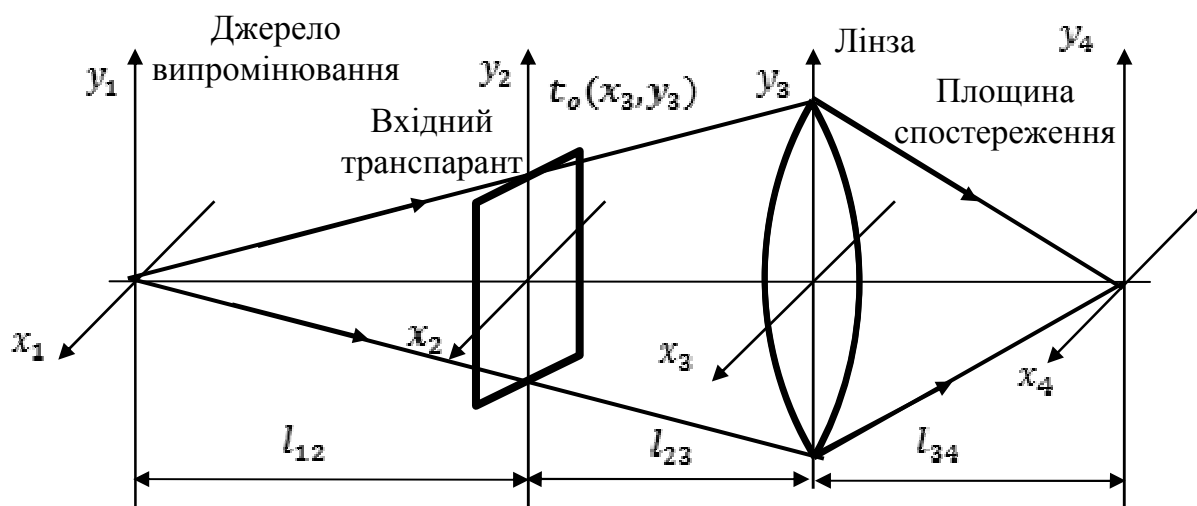


Рис. 3.4. Поширення когерентного випромінювання в оптичній системі із вхідним транспарантом, встановленим перед об'єктивом

Нехай у площині $x_1 y_1$ розміщене в центрі системи координат $x_1 = y_1 = 0$ (на оптичній осі системи) точкове джерело випромінювання з амплітудою V_0 і довжиною хвилі λ . Тоді амплітуду світлового поля в цій площині описують виразом

$$V(x_1, y_1) = V_0 \delta(x_1, y_1). \quad (3.19)$$

Вважатимемо, що на шляху поширення випромінювання між чотирма площинами спостерігається дифракція Френеля, рівняння якої для розглядуваної оптичної системи можна записати на основі співвідношення (2.31) у вигляді

$$\begin{aligned} V(x_{i+1}, y_{i+1}) &= \frac{\exp(jkl_{i,i+1})}{j\lambda l_{i,i+1}} \times \\ &\times \iint_{-\infty}^{\infty} V'(x_i, y_i) \exp \left\{ j \frac{k}{2l_{i,i+1}} [(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2] \right\} dx_i dy_i = \\ &= \Phi_{i,i+1} \{ V(x_i, y_i) \}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

де $\Phi_{i,i+1} \{ \}$ – оператор Френеля, який описує явище дифракції під час поширення випромінювання між i -ю та $(i + 1)$ -ю площинами, відстань між якими $l_{i,i+1}$; $V'(x_i, y_i)$ – розподіл поля безпосередньо за i -ю площиною; $i = 1, 2, 3$.

Використовуючи оператор (3.20), знаходимо амплітуду поля, яке освітлює транспарант у площині $x_2 y_2$. Підставимо функцію (2.19) в оператор (3.20):

$$\begin{aligned} V(x_2, y_2) &\frac{\exp(jkl_{12})}{j\lambda l_{12}} \times \\ &\times \iint_{-\infty}^{\infty} V_0 \delta(x_1, y_1) \exp \left\{ j \frac{k}{2l_{12}} [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] \right\} dx_1 dy_1. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Розподіл поля за транспарантом з амплітудним коефіцієнтом пропускання $t_o(x_2, y_2)$ визначають з урахуванням співвідношення (3.21) як

$$\begin{aligned} V'(x_2, y_2) &= V(x_2, y_2) t_o(x_2, y_2) = \\ &= \frac{\exp(jkl_{12})}{j\lambda l_{12}} V_0 t_o(x_2, y_2) \exp \left[j \frac{k}{2l_{12}} (x_2^2 + y_2^2) \right]. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Використовуючи оператор (3.20) до ділянки між площинами 2 та 3 і враховуючи (3.22), визначимо розподіл поля у площині перед тонкою лінзою:

$$V(x_3, y_3) = \Phi_{23}\{V'(x_2, y_2)\} = V_0 \frac{\exp(jkl_{12})}{j\lambda l_{12}} \frac{\exp(jkl_{23})}{j\lambda l_{23}} \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_2, y_2) \exp\left[\frac{k}{2l_{12}}(x_2^2 + y_2^2)\right] \exp\left\{j\frac{k}{2l_{23}}[(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2]\right\} dx_2 dy_2. \quad (3.23)$$

Розподіл поля за лінзою обчислимо згідно з перетворенням (3.15):

$$V'(x_3, y_3) = V(x_3, y_3) t_l(x_3, y_3) = V(x_3, y_3) \exp\left[-j\frac{k}{2f}(x_3^2 + y_3^2)\right]. \quad (3.24)$$

Використовуючи знову оператор Френеля (3.20) і враховуючи вираз (3.24), аналізуючи поширення світла між площинами 3 і 4, визначимо розподіл поля у площині $x_4 y_4$:

$$V(x_4, y_4) = V_0 \frac{\exp(jkl_{12})}{j\lambda l_{12}} \frac{\exp(jkl_{23})}{j\lambda l_{23}} \frac{\exp(jkl_{34})}{j\lambda l_{34}} \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} V(x_3, y_3) \exp\left[-j\frac{k}{2f}(x_3^2 + y_3^2)\right] \exp\left\{j\frac{k}{2l_{34}}[(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2]\right\} dx_3 dy_3. \quad (3.25)$$

Підставивши вираз (3.23) у (3.25), отримаємо загальний вираз для обчислення амплітуди поля у площині $x_4 y_4$:

$$V(x_4, y_4) = V_0 \frac{\exp(jkl_{12})}{j\lambda l_{12}} \frac{\exp(jkl_{23})}{j\lambda l_{23}} \frac{\exp(jkl_{34})}{j\lambda l_{34}} \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_2, y_2) \exp\left[j\frac{k}{2l_{12}}(x_2^2 + y_2^2)\right] \exp\left\{j\frac{k}{2l_{23}}[(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2]\right\} \times \\ \times \exp\left[-j\frac{k}{2f}(x_3^2 + y_3^2)\right] \exp\left\{j\frac{k}{2l_{34}}[(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2]\right\} dx_2 dy_2 dx_3 dy_3. \quad (3.26)$$

Групуємо у підінтегральному виразі (3.26) експоненціальні співмножники з однаковими змінними, а також використовуємо табличний інтеграл 2.3.15.11 з довідника [3],

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-px^2 - qx) dx = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \exp\left(\frac{q^2}{4p}\right), \quad (3.27)$$

матимемо:

$$V(x_4, y_4) = V_0 \frac{\exp[jk(l_{12} + l_{23} + l_{34})]}{j\lambda^3 l_{12} l_{23} l_{34}} \frac{2\pi}{jk\left(\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}} - \frac{1}{l_{34}}\right)} \times \\ \times \exp\left\{jk\left[\frac{1}{2l_{34}} - \frac{1}{2l_{34}\left(\frac{1}{l_{23}} + \frac{1}{l_{34}} - \frac{1}{f}\right)}\right](x_4^2 + y_4^2)\right\} \times$$

$$\times \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_2, y_2) \exp \left\{ \frac{jk}{2} \left[\left(\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}} \right) - \frac{1}{l_{23}^2 \left(\frac{1}{l_{23}} + \frac{1}{l_{34}} - \frac{1}{f} \right)} \right] (x_2^2 + y_2^2) \right\} \times \\ \times \exp \left[-j2\pi \frac{1}{\lambda l_{23} l_{34} \left(\frac{1}{l_{23}} + \frac{1}{l_{34}} - \frac{1}{f} \right)} (x_2 x_4 + y_2 y_4) \right] dx_2 dy_2. \quad (3.28)$$

Отриманий вираз (3.28) описує розподіл світлового поля у площині $x_4 y_4$ за умови довільного взаємного розміщення всіх чотирьох площин оптичної системи (див. рис. 3.4).

3.2.2. Розподіл світлового поля у площині аналізу, коли транспарант встановлено перед лінзою

Розглянемо перетворення Фур'є двовимірної функції амплітудного коефіцієнта пропускання транспаранта $t_o(x_2, y_2)$:

$$T_o(v_x, v_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_2, y_2) \exp[-j2\pi(v_x x_2 + v_y y_2)] dx_2 dy_2. \quad (3.29)$$

Змінюючи параметри оптичної системи (відстань $l_{i,i+1}$), спробуємо наблизити вираз (3.28) до перетворення Фур'є (3.29). Оберемо параметри оптичної системи так, щоб підінтегральний експоненціальний квадратичний множник у виразі (3.28) дорівнював одиниці, тобто

$$\exp \left\{ \frac{jk}{2} \left[\left(\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}} \right) - \frac{1}{l_{23}^2 \left(\frac{1}{l_{23}} + \frac{1}{l_{34}} - \frac{1}{f} \right)} \right] (x_2^2 + y_2^2) \right\} = 1. \quad (3.30)$$

Із рівняння (3.30) маємо

$$\left(\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}} \right) - \frac{1}{l_{23}^2 \left(\frac{1}{l_{23}} + \frac{1}{l_{34}} - \frac{1}{f} \right)} = 0. \quad (3.31)$$

Розв'язуючи рівняння (3.31) відносно l_{34} знаходимо, що

$$l_{34} = \frac{f(l_{12} + l_{23})}{(l_{12} + l_{23}) - f}. \quad (3.32)$$

Вираз (3.28) дає змогу підібрати таке поєднання геометричних параметрів оптичної системи, за яких вказаний фазовий множник (3.30) усувається.

Позначимо через $l_{13} = l_{12} + l_{23}$ відстань між джерелом випромінювання і лінзою. Тоді співвідношення (3.32) набуває вигляду

$$\frac{1}{l_{13}} + \frac{1}{l_{34}} = \frac{1}{f}. \quad (3.33)$$

Вираз (3.33) є відомою *формулою лінзи* із геометричної оптики.

Отже, якщо для оптичної системи, зображеної на рис. 3.4, справедлива формула лінзи (3.33), то у разі довільного розміщення вхідного транспаранта розподіл поля у площині $x_4 y_4$ має вигляд

$$V(x_4, y_4) = C \exp \left\{ jk \left[\frac{1}{2l_{34}} - \frac{1}{2l_{23} \left(\frac{1}{l_{23}} + \frac{1}{l_{34}} - \frac{1}{f} \right)} \right] (x_4^2 + y_4^2) \right\} \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_2, y_2) \times \exp \left[-j2\pi \frac{1}{\lambda l_{23} l_{34} \left(\frac{1}{l_{23}} + \frac{1}{l_{34}} - \frac{1}{f} \right)} (x_2 x_4 + y_2 y_4) \right] dx_2 dy_2, \quad (3.34)$$

де C – комплексна стала, яка не впливає на розподіл поля у площині $x_4 y_4$,

$$C = V_0 \frac{\exp[jk(l_{12} + l_{23} + l_{34})]}{j\lambda^3 l_{12} l_{23} l_{34}} \frac{2\pi}{jk \left(\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}} + \frac{1}{l_{34}} \right)}.$$

Нехай транспарант $t_o(x_2, y_2)$ освітлюється плоскою монохроматичною хвилею з амплітудою V_p . Це означає, що джерело випромінювання перебуває в нескінченності, $l_{12} = \infty$, а площа спостереження $x_4 y_4$ розміщена у задній фокальній площині лінзи, тобто $l_{34} = f$. При цьому амплітуду плоскої хвилі визначають як

$$V_p = V_0 \frac{\exp[jk(l_{12} + l_{23} + l_{34})]}{j\lambda l_{12}}.$$

Розглянемо два окремі випадки рівняння (3.34), коли:

1. *Транспарант встановлено безпосередньо перед лінзою* (рис. 3.5, а), $l_{23} = 0$, а розподіл амплітуди поля у площині спостереження можна описати виразом

$$V(x_4, y_4) = \frac{V_p}{j\lambda f} \exp \left[j \frac{k}{2f} (x_4^2 + y_4^2) \right] \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_2, y_2) \exp \left[-j \frac{2\pi}{\lambda f} (x_2 x_4 + y_2 y_4) \right] dx_2 dy_2. \quad (3.35)$$

2. Прозорий встановлено у передній фокальній площині лінзи (рис. 3.5, б), $l_{23} = f$, а розподіл амплітуди поля у площині спостереження можна описати виразом

$$V(x_4, y_4) = \frac{V_p}{j\lambda f} \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_2, y_2) \exp \left[-j \frac{2\pi}{\lambda f} (x_2 x_4 + y_2 y_4) \right] dx_2 dy_2. \quad (3.36)$$

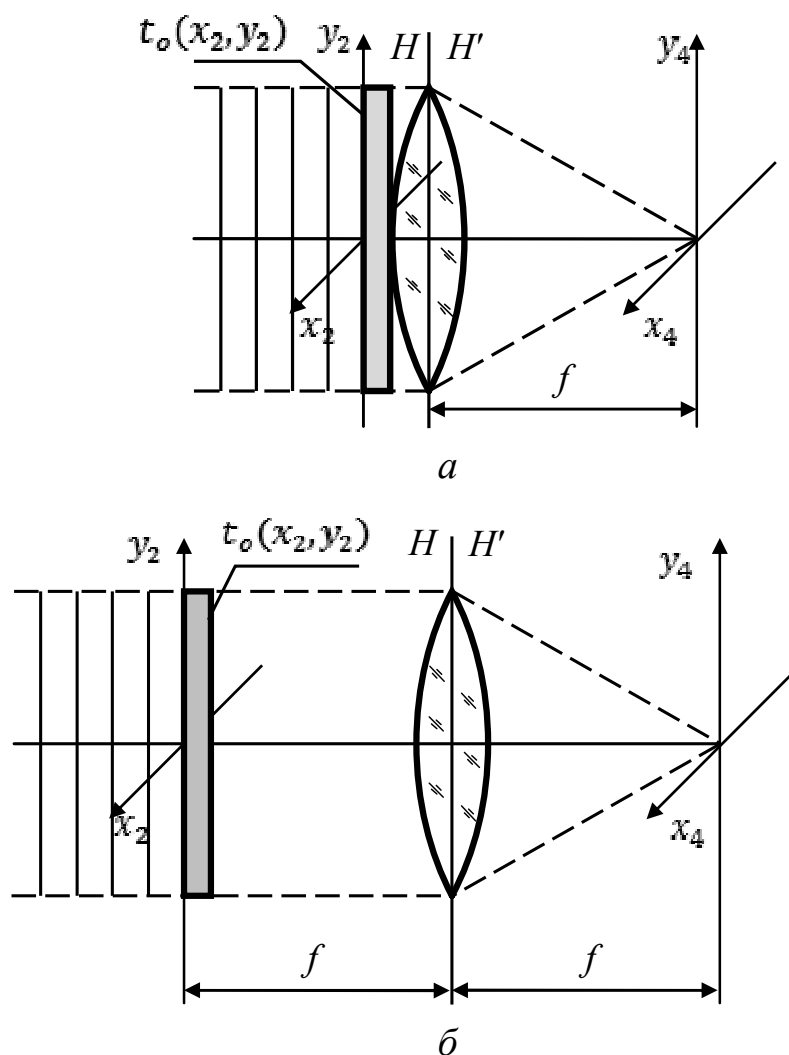


Рис. 3.5. Оптичні схеми когерентних спектроаналізаторів, коли положення прозорого:
а – безпосередньо перед лінзою; б – у передній фокальній площині лінзи

Із порівняння виразів (3.35) і (3.36) з перетворенням (3.29) впливає такий важливий висновок: якщо прозорий встановлено у передній фокальній площині лінзи, то фазової похибки, зумовленої експоненціальним множником, що стоїть перед інтегралом у виразі (3.35), не буде. При цьому комплексна амплітуда світлового поля у задній фокальній

площині лінзи з точністю до постійного множника $V_p/j\lambda f$ являє собою просторовий спектр від амплітудного коефіцієнта пропускання транспаранта з просторовими частотами:

$$v_x = \frac{x_4}{\lambda f}, \quad v_y = \frac{y_4}{\lambda f}. \quad (3.37)$$

Отримана формула (3.36) не враховує кінцевих розмірів лінзи, які характеризуються *функцією зіниці*:

$$P(x_3, y_3) = \begin{cases} 1, & \text{в середині апертури;} \\ 0, & \text{за межами апертури.} \end{cases} \quad (3.38)$$

Врахуємо функцію (3.38) у виразі (3.36). У формуванні поля у площині спостереження в точці (x_4, y_4) бере участь тільки частина транспаранта, обмежена проекцією апертури лінзи на транспарант (рис. 3.6). Із рис. 3.6 знаходимо координати центра цієї проекції: $x_2 = -x_4$ та $y_2 = -y_4$. При цьому ефективний коефіцієнт пропускання транспаранта

$$t_{ef}(x_2, y_2) = t_o(x_2, y_2)P(x_2 + x_4, y_2 + y_4), \quad (3.39)$$

де $P(x_2 + x_4, y_2 + y_4)$ – функція зіниці (3.38), що проектується на транспарант (площину $x_2 y_2$).

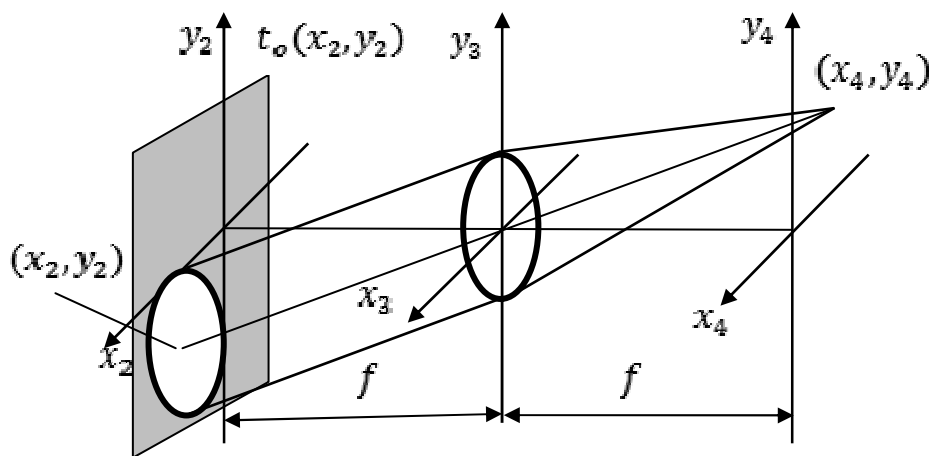


Рис. 3.6. Вплив віньєтування лінзи

Отже, апертурна діафрагма тонкої лінзи обмежує ефективний розмір транспаранта, при цьому амплітудний коефіцієнт пропускання тієї частини транспаранта, яка визначає поле у фіксованій точці (x_4, y_4) , залежить від координат x_4, y_4 .

Враховуючи функцію (3.39), розподіл поля (3.36) запишемо у вигляді

$$V(x_4, y_4) = \frac{V_p}{j\lambda f} \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_2, y_2) P(x_2 + x_4, y_2 + y_4) \times \\ \times \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda f} (x_2 x_4 + y_2 y_4)\right] dx_2 dy_2. \quad (3.40)$$

З виразу (3.40) видно, що з віддаленням транспаранта від лінзи з'являється віньєтування в оптичній системі.

3.2.3. Розподіл світлового поля у площині аналізу, коли транспарант встановлено за лінзою

Розглянемо процес проходження монохроматичного випромінювання через оптичну систему із вхідним транспарантом, встановленим за лінзою (рис. 3.7).

Виконавши дослідження з поширення випромінювання між окремими елементами оптичної системи, аналогічні дослідженням для схеми, зображеної на рис. 3.4, можна побачити, що амплітуду поля у площині $x_4 y_4$ описують виразом

$$V(x_4, y_4) = V_0 \frac{\exp[jk(l_{12} + l_{23} + l_{34})]}{j\lambda^2 l_{12} l_{23} l_{34}} \frac{2\pi}{jk\left(\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}} - \frac{1}{l_{34}}\right)} \exp\left[-j \frac{k}{2l_{34}} (x_4^2 + y_4^2)\right] \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_3, y_3) \exp\left\{\frac{jk}{2} \left[\left(\frac{1}{l_{23}} + \frac{1}{l_{34}}\right) - \frac{1}{l_{23}^2\left(\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}} - \frac{1}{f}\right)}\right] (x_3^2 + y_3^2)\right\} \times \\ \times \exp\left[-j2\pi \frac{1}{\lambda l_{34}} (x_3 x_4 + y_3 y_4)\right] dx_3 dy_3. \quad (3.41)$$

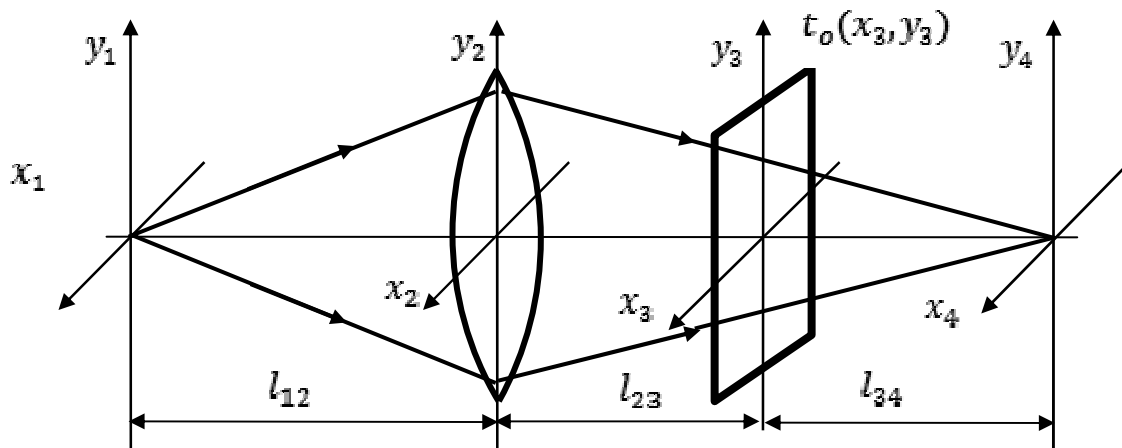


Рис. 3.7. Поширення монохроматичного випромінювання в оптичній системі з вхідним транспарантом, встановленим за лінзою

Вираз (3.41) містить ряд експоненціальних співмножників. Оберемо параметри оптичної схеми так, щоб підінтегральний експоненціальний квадратичний множник дорівнював одиниці, тобто

$$\exp\left\{\frac{jk}{2}\left[\left(\frac{1}{l_{23}} + \frac{1}{l_{34}}\right) - \frac{1}{l_{23}^2\left(\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}} - \frac{1}{f}\right)}\right](x_3^2 + y_3^2)\right\} = 1, \quad (3.42)$$

звідси

$$\left(\frac{1}{l_{23}} + \frac{1}{l_{34}}\right) - \frac{1}{l_{23}^2\left(\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}} - \frac{1}{f}\right)} = 0. \quad (3.43)$$

Співвідношення (3.43) можна подати у вигляді

$$\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23} + l_{34}} = \frac{1}{f}, \quad (3.44)$$

що являє собою формулу лінзи.

Отже, якщо виконується умова (3.44), то з точністю до фазового множника, що стоїть перед інтегралом у виразі (3.41), розподіл поля у площині спостереження $x_4 y_4$ являє собою просторовий спектр коефіцієнта пропускання $t_o(x_3, y_3)$ транспаранта з просторовими частотами:

$$v_x = \frac{x_4}{\lambda l_{34}}; \quad v_y = \frac{y_4}{\lambda l_{34}}. \quad (3.45)$$

Нехай лінза освітлюється плоскою монохроматичною хвилею з амплітудою V_p . При цьому $l_{23} + l_{34} = f$, а $V_p = V_0 \exp[jk(l_{12} + l_{23} + l_{34})]/j\lambda l_{12}$. Тоді вираз (3.41) з урахуванням (3.42) набуває вигляду

$$V(x_4, y_4) = V_0 \frac{f}{j\lambda l_{34}^2} \exp\left[-j \frac{k}{2l_{34}}(x_4^2 + y_4^2)\right] \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_3, y_3) \exp\left[-j2\pi \frac{1}{\lambda l_{34}}(x_3 x_4 + y_3 y_4)\right] dx_3 dy_3. \quad (3.46)$$

Обмежений розмір освітленої ділянки на транспаранті можна врахувати, якщо використовувати ефективну функцію значка, проведену до площини транспаранта $x_3 y_3$. З рис. 3.7 знаходимо, що

$$\frac{x_2}{f} = \frac{x_3}{l_{34}}, \quad \frac{y_2}{f} = \frac{y_3}{l_{34}}, \quad \text{або} \quad x_2 = \frac{f}{l_{34}} x_3; \quad y_2 = \frac{f}{l_{34}} y_3,$$

звідси

$$P_{ef}(x_3, y_3) = P\left(\frac{f}{l_{34}} x_3, \frac{f}{l_{34}} y_3\right). \quad (3.47)$$

Підставивши функцію зіниці (3.47) у (3.39), а потім у вираз (3.46), отримаємо:

$$V(x_4, y_4) = V_0 \frac{f}{j\lambda l_{34}^2} \exp \left[-j \frac{k}{2l_{34}} (x_4^2 + y_4^2) \right] \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_3, y_3) P\left(\frac{f}{l_{34}} x_3, \frac{f}{l_{34}} y_3\right) \exp \left[-j2\pi \frac{1}{\lambda l_{34}} (x_3 x_4 + y_3 y_4) \right] dx_3 dy_3. \quad (3.48)$$

Розподіл поля $V(x_4, y_4)$ у площині спостереження (3.48) являє собою з точністю до фазового множника перетворення Фур'є від амплітудного коефіцієнта пропускання транспаранта з урахуванням функції зіниці лінзи для просторових частот (3.45):

$$v_x = \frac{x_4}{\lambda l_{34}}; \quad v_y = \frac{y_4}{\lambda l_{34}}. \quad (3.49)$$

Вираз (3.48) фактично збігається з формулою (3.35), отриманою для випадку, коли транспарант встановлено впритул до лінзи (за $l_{34} = f$). Однак встановлення транспаранта за лінзою (рис. 3.7) дає можливість змінювати масштаб просторового спектру. Зі збільшенням l_{34} просторовий масштаб спектру збільшується доти, поки транспарант не опиниться поблизу лінзи. Зі зменшенням l_{34} масштаб спектру зменшується.

3.3. Дифракційна теорія формування зображення тонкою додатною лінзою

Розглянемо на основі скалярної теорії дифракції процес формування дійсного зображення тонкою додатною лінзою. Вважатимемо, що лінза не має аберацій, а предмет освітлюється монохроматичним джерелом випромінювання.

3.3.1. Функція розсіювання тонкої додатної лінзи

Нехай об'єкт з розподілом амплітуди поля $V_o(x_o, y_o)$ розміщений у площині $x_o y_o$, яка перебуває на відстані мінус a від площини, де встановлено тонку додатну лінзу (рис. 3.8). Лінза перебуває у площині x_y , а зображення – у площині $x_i y_i$.

Визначимо розподіл поля $V_i(x_i, y_i)$ у площині $x_i y_i$, яка перебуває на довільній відстані a' за лінзою. Через лінійність явища розподілу світлової хвилі функцію $V_i(x_i, y_i)$ на виході оптичної схеми можна подати у вигляді інтеграла суперпозиції:

$$V_i(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(x_i, y_i; x_o, y_o) V_o(x_o, y_o) dx_o dy_o. \quad (3.50)$$

Інтеграл (3.50) справедливий для когерентного світла. Функція $h(x_i, y_i; x_o, y_o)$ являє собою амплітуду поля в точці (x_i, y_i) , створену точковим джерелом, яке перебуває у площині предметів у точці (x_o, y_o) , тому її називають *функцією розсіювання* або *імпульсним відгуком* оптичної системи. Для випадку, що розглядається, вона являє собою дифракційне зображення точкового джерела.

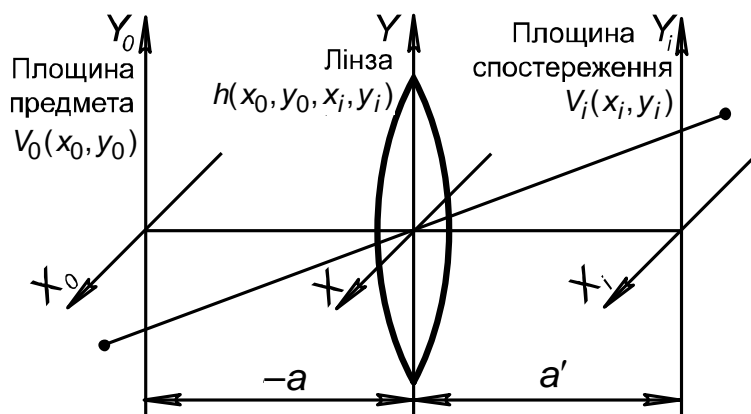


Рис. 3.8. Схема формування зображення тонкою додатною лінзою

Визначимо вид функції розсіювання $h(x_i, y_i; x_o, y_o)$. Для цього помістимо в довільну точку (x'_o, y'_o) предметної площини точкове джерело випромінювання одиничної амплітуди, яке математично можна описати за допомогою дельта-функції:

$$V_o(x_o, y_o) = \delta(x'_o - x_o, y'_o - y_o). \quad (3.51)$$

Для функції (3.51) в наближенні дифракції Френеля (3.20) амплітуду поля у площині перед лінзою описують як

$$\begin{aligned} V(x, y) &= \frac{-1}{i\lambda a} \iint_{-\infty}^{\infty} \delta(x'_o - x_o, y'_o - y_o) \exp\left\{-j \frac{k}{2a} [(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2]\right\} dx_o dy_o = \\ &= \frac{-1}{i\lambda a} \exp\left\{-j \frac{k}{2a} [(x - x'_o)^2 + (y - y'_o)^2]\right\}. \end{aligned} \quad (3.52a)$$

У виразі (3.52a) не враховано сталий фазовий множник $\exp(-jka)$, який не впливає на розподіл поля $V(x, y)$.

Після проходження випромінювання через лінзу обмежених розмірів розподіл поля у площині за лінзою з урахуванням перетворення (3.15) вираз (3.52a) набуває вигляду

$$\begin{aligned} V'(x, y) = V(x, y)t_l(x, y) = \frac{-1}{j\lambda a} P(x, y) \exp \left[-j \frac{k}{2f} (x^2 + y^2) \right] \times \\ \times \exp \left\{ -j \frac{k}{2a} [(x - x_o')^2 + (y - y_o')^2] \right\} = \frac{-1}{j\lambda a} P(x, y) \times \\ \times \exp \left[-j \frac{k}{2} \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{a} \right) (x^2 + y^2) \right] \exp \left[-j \frac{k}{2a} (x_o'^2 + y_o'^2) \right] \times \\ \times \exp \left[-j \frac{k}{a} (x_o' x + y_o' y) \right], \end{aligned} \quad (3.52б)$$

де $P(x, y)$ – функція зіниці лінзи, що визначається співвідношенням (3.38).

Знову вважатимемо, що для поширення випромінювання від лінзи до довільної площини спостереження $x_i y_i$ справедлива дифракція Френеля (3.20). Тоді амплітуду у дифракційному зображенні точкового джерела описують виразом

$$\begin{aligned} V(x_i, y_i) = h(x_o', y_o'; x_i, y_i) = \\ = \frac{1}{j\lambda a'} \iint_{-\infty}^{\infty} V'(x, y) \exp \left\{ j \frac{k}{2a'} [(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2] \right\} dx dy, \end{aligned} \quad (3.53)$$

де знову не враховано сталий фазовий множник $\exp(jka')$.

Підставляючи амплітуду поля (3.52б) у вираз (3.53), отримаємо:

$$\begin{aligned} h(x_o', y_o'; x_i, y_i) = \frac{1}{\lambda^2 a a'} \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \exp \left[-j \frac{k}{2} \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{a} \right) (x^2 + y^2) \right] \times \\ \times \exp \left[-j \frac{k}{2a} (x_o'^2 + y_o'^2) \right] \exp \left[-j \frac{k}{a} (x_o' x + y_o' y) \right] \times \\ \times \exp \left[j \frac{k}{2a'} (x_i^2 + y_i^2) \right] \exp \left[j \frac{k}{2a'} (x^2 + y^2) \right] \exp \left[-j \frac{k}{a'} (x_i x + y_i y) \right] dx dy = \\ = \frac{1}{\lambda^2 a a'} \exp \left[-j \frac{k}{2a} (x_o'^2 + y_o'^2) \right] \exp \left[j \frac{k}{2a'} (x_i^2 + y_i^2) \right] \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \exp \left[j \frac{k}{2} \left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{f} - \frac{1}{a} \right) (x^2 + y^2) \right] \times \\ \times \exp \left\{ -jk \left[\left(\frac{x_i}{a'} - \frac{x_o'}{a} \right) x + \left(\frac{y_i}{a'} - \frac{y_o'}{a} \right) y \right] \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Оскільки точку (x'_o, y'_o) , де розміщене точкове джерело випромінювання, вибирали довільно, у виразі (3.54) для функції розсіювання замість x'_o, y'_o можна записати x_o, y_o . Отриманий вираз (3.54) є дифракційним зображенням точки у площині $x_i y_i$, яка перебуває на довільній відстані a' від лінзи. Підставляючи функцію $h(x'_o, y'_o; x_i, y_i)$ в інтеграл суперпозиції (3.50), можна знайти розподіл поля у довільній площині $x_i y_i$, який формується об'єктом з амплітудою поля $V_o(x_o, y_o)$.

3.3.2. Функція розсіювання додатної лінзи у площині геометричного зображення

Виберемо відстані a та a' (див. рис. 3.8) таким чином, щоб перша експонента під інтегралом у виразі (3.54) дорівнювала одиниці. Це можливо, якщо виконується умова

$$\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} - \frac{1}{f} = 0, \text{ або } \frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{f}. \quad (3.55)$$

Співвідношення (3.55) являє собою відому формулу відрізків для ідеальної оптичної системи.

Дві експоненти, що стоять перед інтегралом у виразі (3.54), вносять фазове спотворення у вигляді сферичних хвиль. Тому, якщо поверхні предмета і зображення сферичні, ці множники зникають. Здебільшого приймачі випромінювання реєструють інтенсивність світла, тобто зазначені вище експоненти можна не враховувати, оскільки вони вносять тільки фазові спотворення. Тоді, з урахуванням співвідношення (3.55), функція розсіювання матиме вигляд

$$h(x_o, y_o; x_i, y_i) = \frac{1}{\lambda^2 a a'} \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \exp \left\{ -j k \left[\left(\frac{x_i}{a'} - \frac{x_o}{a} \right) x + \left(\frac{y_i}{a'} - \frac{y_o}{a} \right) y \right] \right\} dx dy. \quad (3.56)$$

Введемо поняття поперечного збільшення оптичної системи:

$$\beta = \frac{x_i}{x_o} = \frac{y_i}{y_o} = \frac{a'}{a}. \quad (3.57)$$

З урахуванням збільшення (3.57) функція (3.56) матиме вигляд

$$\begin{aligned} h(x_o, y_o; x_i, y_i) &= \\ &= \frac{1}{\lambda^2 a a'} \iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \exp \left\{ -j \frac{2\pi}{\lambda a'} [(x_i - \beta x_o)x + (y_i - \beta y_o)y] \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Оскільки функція розсіювання точки (ФРТ) лінзи залежить від різниці координат, тобто

$$h(x_o, y_o; x_i, y_i) = h(x_i - \beta x_o, y_i - \beta y_o), \quad (3.59)$$

лінзу можна розглядати як просторово-інваріантну систему, а інтеграл суперпозиції (3.50) перетворюється в інтеграл згортки.

Порівнюючи вираз (3.58) з формулою дифракції Фраунгофера (2.65), можна помітити, що ФРТ додатної лінзи відповідає дифракції Фраунгофера на зіниці лінзи. При цьому для фіксованої предметної точки $P(x_o, y_o)$ центр дифракційної картини перебуває у точці ідеального зображення $P'(x_{io} = \beta x_o, y_{io} = \beta y_o)$.

Зробимо заміну змінних у функції (3.58):

$$v_x = \frac{x}{\lambda a'}, \quad v_y = \frac{y}{\lambda a'}, \quad (3.60)$$

Із співвідношення (3.60) маємо:

$$x = \lambda a' v_x, \quad y = \lambda a' v_y. \quad (3.61)$$

Тоді функція (3.58) набуває вигляду

$$\begin{aligned} h(x_i - \beta x_o, y_i - \beta y_o) &= \frac{\lambda^2 a'^2}{\lambda^2 a a'} \times \\ &\times \iint_{-\infty}^{\infty} P(\lambda a' v_x, \lambda a' v_y) \exp\{-j2\pi[(x_i - \beta x_o)v_x + (y_i - \beta y_o)v_y]\} dv_x dv_y = \\ &= \beta \iint_{-\infty}^{\infty} P(\lambda a' v_x, \lambda a' v_y) \exp\{-j2\pi[(x_i - \beta x_o)v_x + (y_i - \beta y_o)v_y]\} dv_x dv_y. \end{aligned} \quad (3.62)$$

З виразу (3.62) знаходимо, що

$$h(x_i, y_i) = \beta \iint_{-\infty}^{\infty} P(\lambda a' v_x, \lambda a' v_y) \exp[-j2\pi(x_i v_x + y_i v_y)] dv_x dv_y. \quad (3.63)$$

Отже, функція розсіювання точки додатної лінзи $h(x_i, y_i)$ (3.63) з точністю до сталого множника β являє собою перетворення Фур'є від функції зіниці $P(\lambda a' v_x, \lambda a' v_y)$.

3.3.3. Зв'язок між амплітудами поля у площині зображення і площині предмета

Розподіл амплітуди поля $V_i(x_i, y_i)$ у площині зображення можна отримати, якщо в інтеграл суперпозиції (3.50) підставити вираз для функції розсіювання точки лінзи (3.62).

Розглянемо випадок наближення геометричної оптики, коли $\lambda \rightarrow 0$. Позначимо функцію розсіювання точки лінзи як $h_g = \lim_{\lambda \rightarrow 0} h$.

Знайдемо область існування функції зіниці $P(\lambda a' v_x, \lambda a' v_y)$, яка виражається виразом (3.38):

$$P(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{коли } \sqrt{x^2 + y^2} \leq R_l; \\ 0, & \text{коли } \sqrt{x^2 + y^2} > R_l. \end{cases} \quad (3.64a)$$

З врахуванням змінних (3.61) запишемо функцію (3.64a) у вигляді

$$P(\lambda a' v_x, \lambda a' v_y) = \begin{cases} 1, & \text{коли } \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \leq \frac{R_l}{\lambda a'}; \\ 0, & \text{коли } \sqrt{v_x^2 + v_y^2} > \frac{R_l}{\lambda a'}. \end{cases} \quad (3.64b)$$

Якщо $\lambda \rightarrow 0$, то $\sqrt{v_x^2 + v_y^2} \rightarrow \infty$. Це означає, що у виразі (3.62) $P(\lambda a' v_x, \lambda a' v_y) = 1$. Тоді для функції (3.64b) маємо

$$\begin{aligned} h_g(x_i - \beta x_o, y_i - \beta y_o) &= \\ &= \beta \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\{-j2\pi[(x_i - \beta x_o)v_x + (y_i - \beta y_o)v_y]\} dv_x dv_y = \\ &= \beta \delta(x_i - \beta x_o, y_i - \beta y_o). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Отже, функція розсіювання точки (імпульсний відгук) лінзи (3.65) у наближенні геометричної оптики (для ідеальної оптичної системи) являє собою дельта-функцію.

Підставимо функцію (3.65) в інтеграл суперпозиції (3.50) і скористаємося властивостями дельта-функції:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0); \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x). \quad (3.66)$$

Тоді розподіл поля $V_{ig}(x_i, y_i)$ у наближенні геометричної оптики з урахуванням співвідношення (3.66) матиме вигляд

$$V_{ig}(x_i, y_i) = \frac{1}{\beta} \iint_{-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{x_i}{\beta} - x_o, \frac{y_i}{\beta} - y_o\right) V_o(x_o, y_o) dx_o dy_o = \frac{1}{\beta} V_o\left(\frac{x_i}{\beta}, \frac{y_i}{\beta}\right). \quad (3.67)$$

Зі співвідношення (3.67) випливає, що зображення предмета в наближенні геометричної оптики являє собою збільшену і перевернену ($\beta < 0$) точну копію предмета. Множник $1/\beta$ виражає закон збереження енергії у разі зміни масштабу зображення.

Якщо врахувати дифракційні ефекти, що виникають під час поширення світлового поля в оптичній системі, зображення предмета матиме такий розподіл поля:

$$V_i(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(x_i - \beta x_o, y_i - \beta y_o) V_o(x_o, y_o) dx_o dy_o, \quad (3.68)$$

де функція h визначається виразом (3.62).

У рівнянні (3.68) замінимо змінні: $x_{io} = \beta x_o, y_{io} = \beta y_o$, тоді

$$\begin{aligned} V_i(x_i, y_i) &= \frac{1}{\beta^2} \iint_{-\infty}^{\infty} h(x_i - x_{io}, y_i - y_{io}) V_o\left(\frac{x_{io}}{\beta}, \frac{y_{io}}{\beta}\right) dx_{io} dy_{io} = \\ &= \frac{1}{\beta^2} h(x_i, y_i) * V_o\left(\frac{x_i}{\beta}, \frac{y_i}{\beta}\right). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} h_n(x_i, y_i) &= \frac{1}{\beta} h(x_i, y_i) = \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} P(\lambda \alpha' v_x, \lambda \alpha' v_y) \exp[-j2\pi(x_i v_x + y_i v_y)] dv_x dv_y. \end{aligned} \quad (3.70)$$

З урахуванням позначень (3.67) і (3.70) вираз (3.69) матиме вигляд

$$\begin{aligned} V_i(x_i, y_i) &= \iint_{-\infty}^{\infty} h_n(x_i - x_{io}, y_i - y_{io}) V_{ig}(x_{io}, y_{io}) dx_{io} dy_{io} = \\ &= h_n(x_i, y_i) * V_{ig}(x_i, y_i). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Отриманий вираз (3.71) показує, що з урахуванням дифракційних ефектів зображення $V_i(x_i, y_i)$ не можна вважати точною копією предмета $V_o(x_o, y_o)$. Він являє собою згортку ідеального зображення $V_{ig}(x_i, y_i)$ з нормованою функцією розсіювання $h_n(x_i, y_i)$ тонкої додатної лінзи, тобто зображення є дещо згладженим порівняно з предметом. Згладжування – це наслідок нерівності нулю ширини функції розсіювання, воно може спричинити значне послаблення дрібних деталей предмета і, відповідно, втрату точності під час відтворення зображення.

Крім того, подання вихідного предмета у вигляді згортки вхідного предмета з імпульсним відгуком (функцією розсіювання) дає змогу використовувати для дослідження процесу формування зображення методи просторово-частотного аналізу.

3.4. Приклади розрахунку розподілу світлового поля в оптичних системах

Приклад 3.1. Амплітудний коефіцієнт пропускання екрана описують функцією, що має осьову симетрію:

$$t_o(r) = \frac{1}{2} [1 + \cos(\alpha r^2)].$$

Доведіть, що такий екран діє подібно до лінзи. Знайдіть фокусну відстань цієї лінзи.

Розв'язання. Нехай на екран нормально падає плоска монохроматична хвиля одиничної амплітуди. Тоді розподіл поля безпосередньо за екраном описують функцією

$$V(x, y) = t_o(x, y) = \frac{1}{2} \{1 + \cos[\alpha(x^2 + y^2)]\}. \quad (3.72)$$

Розподіл поля у площині спостереження $x_o y_o$, паралельній екрану і розміщеній на відстані z від нього, знаходять за формулою дифракції Френеля (2.56), яку без урахування фазового множника можна подати у вигляді

$$V(x_o, y_o) = \frac{1}{j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} V(x, y) \exp\left\{j \frac{\pi}{\lambda z} [(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2]\right\} dx dy. \quad (3.73)$$

Запишемо функцію (3.72) у комплексному вигляді, використовуючи формулу Ейлера $\cos t = \frac{1}{2}(e^{jt} + e^{-jt})$, і підставимо її в інтеграл (3.73):

$$V(x_o, y_o) = \frac{1}{2j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{1 + \frac{1}{2} \exp[j\alpha(x^2 + y^2)] + \frac{1}{2} \exp[-j\alpha(x^2 + y^2)]\right\} \times \\ \times \exp\left\{j \frac{\pi}{\lambda z} [(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2]\right\} dx dy. \quad (3.74)$$

Визначимо амплітуду поля в центрі дифракційної картини (3.74), коли $x_o = y_o = 0$:

$$V(0, 0) = \frac{1}{2j\lambda z} \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2)\right] + \frac{1}{2} \exp[j\alpha(x^2 + y^2)] \times \right. \\ \times \left. \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2)\right] + \frac{1}{2} \exp[-j\alpha(x^2 + y^2)] \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2)\right] \right\} dx dy = \\ = \frac{1}{2j\lambda z} (I_1 + I_2 + I_3), \quad (3.75)$$

де

$$I_1 = \iint_{-\infty}^{\infty} \exp \left[j \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2) \right] dx dy = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(j \frac{\pi}{\lambda z} x^2 \right) dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(j \frac{\pi}{\lambda z} y^2 \right) dy = I_{11} I_{12}; \quad (3.76)$$

$$I_2 = \iint_{-\infty}^{\infty} \exp \left[j \left(\frac{\pi}{\lambda z} + j\alpha \right) (x^2 + y^2) \right] dx dy = I_{21} I_{22}; \quad (3.77)$$

$$I_3 = \iint_{-\infty}^{\infty} \exp \left[j \left(\frac{\pi}{\lambda z} - j\alpha \right) (x^2 + y^2) \right] dx dy = I_{31} I_{32}. \quad (3.78)$$

Обчислимо інтеграли I_{mn} у співвідношеннях (3.76)–(3.78). Подамо інтеграл I_{11} у вигляді

$$I_{11} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(j \frac{\pi}{\lambda z} x^2 \right) dx = 2 \int_0^{\infty} \left[\cos \left(\frac{\pi}{\lambda z} x^2 \right) + j \sin \left(\frac{\pi}{\lambda z} x^2 \right) \right] dx. \quad (3.79)$$

Для обчислення інтеграла (3.79) скористаємося табличними інтегралами 858.561 з таблиці інтегралів [5]:

$$\int_0^{\infty} \cos \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) dt = \int_0^{\infty} \sin \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) dt = \frac{1}{2}. \quad (3.80)$$

Замінімо змінні в (3.78): $\sqrt{2/\lambda z} x = t$; $dx = \sqrt{\lambda z/2} dt$. Тоді з урахуванням інтегралу (3.80) маємо

$$I_{11} = 4 \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} \int_0^{\infty} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) + j \sin \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) \right] dt = 2 \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} (1 + j). \quad (3.81)$$

Аналогічно інтегралу (3.81) знаходимо: $I_{12} = 2 \sqrt{\frac{\lambda z}{2}} (1 + j)$.

Розрахуємо інтеграл I_{21} , подавши його у вигляді

$$I_{21} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[j \left(\frac{\pi}{\lambda z} + \alpha \right) x^2 \right] dx = \\ = 2 \int_0^{\infty} \left\{ \cos \left[\left(\frac{\pi}{\lambda z} + j\alpha \right) x^2 \right] + j \sin \left[\left(\frac{\pi}{\lambda z} + \alpha \right) x^2 \right] \right\} dx. \quad (3.82)$$

Замінімо змінні в інтегралі (3.82):

$$\sqrt{\frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{\lambda z} + \alpha \right)} x = t; \quad dx = \frac{1}{\sqrt{2 \left(\frac{1}{\lambda z} + \frac{\alpha}{\pi} \right)}} dt,$$

тоді

$$I_{21} = 4 \frac{1}{\sqrt{2 \left(\frac{1}{\lambda z} + \frac{\alpha}{\pi} \right)}} \int_0^{\infty} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) + j \sin \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) \right] dt = 2 \frac{1}{\sqrt{2 \left(\frac{1}{\lambda z} + \frac{\alpha}{\pi} \right)}} (1 + j). \quad (3.83)$$

Аналогічно інтегралу (3.83) знаходимо, що

$$I_{22} = 2 \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{1}{\lambda z} + \frac{\alpha}{\pi}\right)}} (1+j); I_{31} = I_{32} = 2 \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{1}{\lambda z} - \frac{\alpha}{\pi}\right)}} (1+j). \quad (3.84)$$

Підставимо знайдені інтеграли (3.81)–(3.84) у вираз (3.75):

$$\begin{aligned} V(0,0) &= \frac{1}{j\lambda z} (1+j)^2 \left[\lambda z + \frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda z} + \frac{\alpha}{\pi}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda z} - \frac{\alpha}{\pi}\right)} \right] = \\ &= (1+j)^2 \frac{1}{j} \left[1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha\lambda z}{\pi}\right)} + \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha\lambda z}{\pi}\right)} \right] = (1+j)^2 \frac{1}{j} \left[1 + \frac{2}{1 - \left(\frac{\alpha\lambda z}{\pi}\right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Функція (3.85) набуває максимального значення, тобто екран працює як лінза у тому випадку, коли виконується умова $\frac{\alpha\lambda z}{\pi} = 1$. Звідси знаходимо фокусну відстань екрана:

$$z = f = \frac{\pi}{\alpha\lambda}. \quad (3.86)$$

Приклад 3.2. У передній фокальній площині об'єктива з фокусною відстанню f встановлено круглу діафрагму радіусом r_0 . Діафрагма освітлюється гауссовим лазерним пучком, який має у площині діафрагми діаметр $2\omega_l$. Визначте розподіл інтенсивності у задній фокальній площині об'єктива за умови, що діаметр вхідної зіниці об'єктива набагато більший за діаметр діафрагми.

Розв'язання. Оскільки діаметр діафрагми набагато менший за діаметр вхідної зіниці об'єктива, то віньєтуванням в оптичній системі можна знехтувати (рис. 3.5, б). У цьому випадку розподіл амплітуди поля в задній фокальній площині знаходять за формулою (3.36), яку подамо у вигляді

$$V(x_4, y_4) = \frac{1}{j\lambda f} \iint_{-\infty}^{\infty} V(x_2, y_2) \exp \left[-j \frac{2\pi}{j\lambda f} (x_2 x_4 + y_2 y_4) \right] dx_2 dy_2, \quad (3.87)$$

де $V(x_2, y_2)$ – розподіл амплітуди поля в отворі діафрагми,

$$V(x_2, y_2) = V_0 \exp \left(-\frac{x_2^2 + y_2^2}{\omega_l^2} \right) \text{circ} \left(\frac{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}{r_0} \right) = V_0 \exp \left(-\frac{r_2^2}{\omega_l^2} \right) \text{circ} \left(\frac{r_2}{r_0} \right); \quad (3.88)$$

V_0 – амплітуда поля в центрі діафрагми;

$\text{circ}\left(\frac{r}{r_0}\right)$ – колова функція,

$$\text{circ}\left(\frac{r}{r_0}\right) = \begin{cases} 1, & \text{коли } 0 \leq r \leq r_0; \\ 0, & \text{коли } r > r_0 \end{cases} \quad (3.89)$$

Оскільки розподіл поля (3.88) є вісесиметричною функцією, то подамо співвідношення (3.87) у вигляді перетворення Фур'є–Бесселя:

$$V(r_4) = \frac{2\pi}{j\lambda f} \int_0^\infty V(r_2) J_0\left(\frac{2\pi r_4}{\lambda f} r_2\right) r_2 dr_2. \quad (3.90)$$

Підставимо амплітуду кола (3.88) в інтеграл (3.90):

$$V(r_4) = \frac{2\pi V_0}{j\lambda f} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r_2^2}{\omega_l^2}\right) \text{circ}\left(\frac{r_2}{r_0}\right) J_0\left(\frac{2\pi r_4}{\lambda f} r_2\right) r_2 dr_2. \quad (3.91)$$

Інтеграл (3.91) являє собою згортку двох функцій:

$$V(r_4) = \frac{V_0}{j\lambda f} [\tilde{f}_1(v_r) * \tilde{f}_2(v_r)], \quad (3.92)$$

де $\tilde{f}_1(v_r)$ – просторовий спектр функції $f_1(r_2) = \exp\left(-\frac{r_2^2}{\omega_l^2}\right)$,

$$\tilde{f}_1(v_r) = 2\pi \int_0^\infty f_1(r_2) J_0(2\pi v_r r_2) r_2 dr_2; \quad (3.93)$$

$\tilde{f}_2(v_r)$ – просторовий спектр функції $f_2(r_2) = \text{circ}\left(\frac{r_2}{r_0}\right)$,

$$\tilde{f}_2(v_r) = 2\pi \int_0^{r_0} J_0(2\pi v_r r_2) r_2 dr_2; \quad (3.94)$$

v_r – просторова частота у полярній системі координат, $v_r = \frac{r_4}{\lambda f}$.

Для обчислення інтеграла (3.93) скористаємося табличним інтегралом 2.12.39.3 із довідника [6]:

$$\int_0^\infty x e^{-p x^2} J_\nu(bx) J_\nu(cx) dx = \frac{1}{2p} \exp\left(-\frac{b^2 + c^2}{4p}\right) I_\nu\left(\frac{bc}{2p}\right). \quad (3.95)$$

Якщо $c = 0$, $\nu = 0$, то інтеграл (3.95) має вигляд

$$\int_0^\infty x e^{-p x^2} J_0(bx) dx = \frac{1}{2p} \exp\left(-\frac{b^2}{4p}\right). \quad (3.96)$$

Замінімо змінні в інтегралі (3.93): $r_2 = x$; $p = 1/\omega_l^2$; $b = 2\pi r_4/\lambda f$, тоді, з урахуванням інтеграла (3.96),

$$\tilde{f}_1(v_r) = \pi \omega_l^2 \exp\left[-\left(\frac{2\pi \omega_l}{\lambda f}\right)^2 r_4^2\right]. \quad (3.97)$$

Для обчислення інтеграла (3.94) скористаємося результатами п. 2.7.2:

$$\tilde{f}_2(v_r) = \pi r_o^2 \left[2 \frac{J_1\left(\frac{2\pi r_o}{\lambda f} r_4\right)}{\frac{2\pi r_o}{\lambda f} r_4} \right]. \quad (3.98)$$

Підставимо функції (3.97) і (3.98) в інтеграл (3.92):

$$V(r_4) = \frac{v_o}{j\lambda f} \pi \omega_l^2 \pi r_o^2 \left\{ \exp \left[- \left(\frac{2\pi \omega_l}{\lambda f} \right)^2 r_4^2 \right] * \left[2 \frac{J_1\left(\frac{2\pi r_o}{\lambda f} r_4\right)}{\frac{2\pi r_o}{\lambda f} r_4} \right] \right\}. \quad (3.99)$$

Розподіл інтенсивності у задній фокальній площині об'єктива з урахуванням амплітуди поля (3.99) знайдемо як

$$I(r_4) = |V(r_4)|^2 = \left(\frac{v_o \pi^2 \omega_l^2 r_o^2}{\lambda f} \right)^2 \left\{ \exp \left[- \left(\frac{2\pi \omega_l}{\lambda f} \right)^2 r_4^2 \right] * \left[2 \frac{J_1\left(\frac{2\pi r_o}{\lambda f} r_4\right)}{\frac{2\pi r_o}{\lambda f} r_4} \right] \right\}^2. \quad (3.100)$$

Приклад 3.3. Плоска монохроматична хвиля одиничної амплітуди нормально падає на додатну лінзу, яка має вхідну зіницю діаметром D_p і фокусну відстань f . На відстані l за лінзою на її осі розміщено предмет, амплітудний коефіцієнт пропускання якого

$$t_o(x, y) = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\pi \nu_o x) \operatorname{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{y}{b}\right).$$

Знайдіть розподіл інтенсивності у фокальній площині лінзи.

Розв'язання. Описана у прикладі оптична система (рис. 3.9) виконує перетворення Фур'є амплітудного коефіцієнта пропускання транспаранта, а розподіл амплітуди поля у фокальній площині лінзи визначається виразом (3.48), фазовий множник у якому не впливає на розподіл інтенсивності і тому у розрахунках ним можна знехтувати. Виберемо систему координат, яка б відповідала рис. 3.7 і виразу (3.48) (рис. 3.9), де $l = l_{23}$.

Подамо вираз (3.48) у вигляді

$$\begin{aligned} V(x_4, y_4) &= \frac{f}{\lambda l_{24}^2} \times \\ &\times \iint_{-\infty}^{\infty} t_o(x_3, y_3) P\left(\frac{f}{l_{24}} x_3, \frac{f}{l_{24}} y_3\right) \exp \left[-j 2\pi \frac{1}{\lambda l_{24}} (x_3 x_4 + y_3 y_4) \right] dx_3 dy_3 = \\ &= \frac{f}{\lambda l_{24}^2} F \left\{ t_o(x_3, y_3) P\left(\frac{f}{l_{24}} x_3, \frac{f}{l_{24}} y_3\right) \right\} = \frac{f}{\lambda l_{24}^2} [\tilde{t}_o(v_x, v_y) * \tilde{P}_{sf}(v_x, v_y)], \end{aligned} \quad (3.101)$$

де $F\{ \}$ – оператор двовимірного перетворення Фур'є; \tilde{t}_o і \tilde{P}_{sf} – просторові спектри функцій t_o і P відповідно; v_x, v_y – просторові частоти, які

знаходять за формулою (3.49), $v_x = \frac{x_4}{\lambda l_{24}}$; $v_y = \frac{y_4}{\lambda l_{24}}$. Символ $\langle * \rangle$ у функції (3.94) означає операцію згортки.

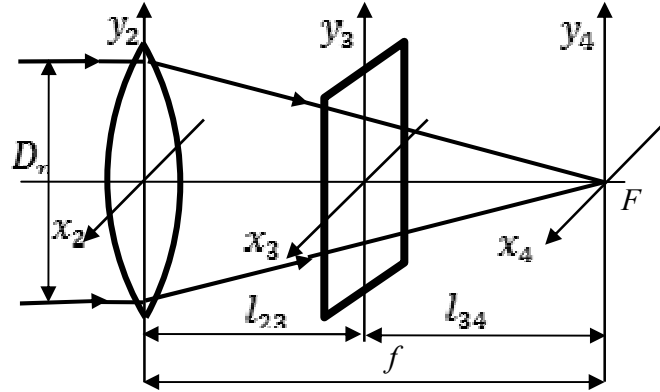


Рис. 3.9. До прикладу 3.3

Розрахуємо функцію $\tilde{t}_o(v_x, v_y)$:

$$\tilde{t}_o(v_x, v_y) = F\{t_o(x_3, y_3)\} = F\left\{\frac{1}{2}[1 + \cos(2\pi v_0 x_3)]\text{rect}\left(\frac{x_3}{a}\right)\text{rect}\left(\frac{y_3}{b}\right)\right\}. \quad (3.102)$$

Перетворення Фур'є (3.102), яке було детально розглянуте в п. 2.7.3, дає згідно з функцією (2.108) такий результат:

$$\begin{aligned} \tilde{t}_o(v_x, v_y) &= absinc(bv_y) \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{2} \text{sinc}(av_x) + \frac{1}{4} \text{sinc}[a(v_x - v_0)] + \frac{1}{4} \text{sinc}[a(v_x + v_0)] \right\}. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Розрахуємо функцію $\tilde{P}_{ef}(v_x, v_y)$. Функція $\frac{1}{\lambda l_{24}} \tilde{P}_{ef}(v_x, v_y)$ описує дифракцію Фраунгофера на круглому отворі діаметром $D_p l_{34}/f$ (див. п. 2.7.2). При цьому розподіл поля у фокальній площині лінзи згідно з інтегралом (2.85) можна знайти за виразом

$$\frac{1}{\lambda l_{24}} \tilde{P}_{ef}(v_x, v_y) = \frac{\pi D_p^2}{4\lambda l_{24}} \left(\frac{l_{34}}{f}\right)^2 \left[2 \frac{J_1\left(\pi D_p \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\right)}{\pi D_p \sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \right]. \quad (3.104)$$

Підставимо функції (3.103) і (3.104) в інтеграл згортки (3.101):

$$\begin{aligned} V(x_4, y_4) &= \frac{\pi D_p^2}{\lambda f} \left\{ absinc(bv_y) \left\{ \frac{1}{2} \text{sinc}(av_x) + \frac{1}{4} \text{sinc}[a(v_x - v_0)] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{4} \text{sinc}[a(v_x + v_0)] \right\} * \left[2 \frac{J_1\left(\pi D_p \sqrt{v_x^2 + v_y^2}\right)}{\pi D_p \sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Вираз (3.105) можна значно спростити, якщо параметри оптичної системи задовольняють такі умови:

1. Діаметр зведеної вхідної зіниці $D_p l_{34}/f$ набагато менший за розміри транспаранта $a \times b$.

2. Просторова частота транспаранта задовольняє умову $v_0 \gg \frac{x_4}{\lambda l_{34}}$.

Якщо виконується перша умова, то $a \text{sinc}(av_x) \rightarrow \delta(v_x)$ і $b \text{sinc}(bv_y) \rightarrow \delta(v_y)$. Тоді вираз (3.102) можна подати у вигляді

$$\tilde{t}_o(v_x, v_y) = \delta(v_y) \left\{ \frac{1}{2} \delta(v_x) + \frac{1}{4} \delta(v_x - v_0) + \frac{1}{4} \delta(v_x + v_0) \right\}. \quad (3.106)$$

Підставимо функцію (3.106) в інтеграл (3.105) і використаємо фільтрувальну властивість дельта-функції (2.107). З урахуванням формул (3.49) для просторової частоти маємо

$$V(x_4, y_4) = \frac{D_p^2}{\lambda f} \left\{ \frac{1}{2} \left[2 \frac{J_1 \left(\frac{\pi D_p}{\lambda l_{34}} \sqrt{x_4^2 + y_4^2} \right)}{\frac{\pi D_p}{\lambda l_{34}} \sqrt{x_4^2 + y_4^2}} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \left[2 \frac{J_1 \left(\frac{\pi D_p}{\lambda l_{34}} \sqrt{(x_4 - \lambda l_{34} v_0)^2 + y_4^2} \right)}{\frac{\pi D_p}{\lambda l_{34}} \sqrt{(x_4 - \lambda l_{34} v_0)^2 + y_4^2}} \right] + \frac{1}{4} \left[2 \frac{J_1 \left(\frac{\pi D_p}{\lambda l_{34}} \sqrt{(x_4 + \lambda l_{34} v_0)^2 + y_4^2} \right)}{\frac{\pi D_p}{\lambda l_{34}} \sqrt{(x_4 + \lambda l_{34} v_0)^2 + y_4^2}} \right] \right\}. \quad (3.107)$$

Якщо виконується друга умова $x_4 \ll \lambda l_{34} v_0$, то окремі складові у функції (3.107) не перекриваються у площині $x_4 y_4$, а тому добуток будь-яких двох цих складових дорівнює нулю. Тоді розподіл інтенсивності у фокальній площині лінзи з урахуванням (3.107) визначатиметься як

$$I(x_4, y_4) = |V(x_4, y_4)|^2 = \left(\frac{\pi D_p^2}{\lambda f} \right)^2 \left\{ \frac{1}{4} \left[2 \frac{J_1 \left(\frac{\pi D_p}{\lambda l_{34}} \sqrt{x_4^2 + y_4^2} \right)}{\frac{\pi D_p}{\lambda l_{34}} \sqrt{x_4^2 + y_4^2}} \right]^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{16} \left[2 \frac{J_1 \left(\frac{\pi D_p}{\lambda l_{34}} \sqrt{(x_4 - \lambda l_{34} v_0)^2 + y_4^2} \right)}{\frac{\pi D_p}{\lambda l_{34}} \sqrt{(x_4 - \lambda l_{34} v_0)^2 + y_4^2}} \right]^2 + \frac{1}{16} \left[2 \frac{J_1 \left(\frac{\pi D_p}{\lambda l_{34}} \sqrt{(x_4 + \lambda l_{34} v_0)^2 + y_4^2} \right)}{\frac{\pi D_p}{\lambda l_{34}} \sqrt{(x_4 + \lambda l_{34} v_0)^2 + y_4^2}} \right]^2 \right\}. \quad (3.108)$$

Отже, розподіл інтенсивності (3.108) у фокальній площині лінзи являє собою три дифракційних картини Фраунгофера на круглому

отворі (картини Ері). Одна з них перебуває у фокусі лінзи, а дві інші зміщені уздовж осі x_4 на величину $\pm \lambda l_{34} v_0$. Причому інтенсивність зміщених картин у чотири рази менша від інтенсивності центральної картини.

3.5. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 3.1. Доведіть, що фокусні відстані двоопуклої та плоскоопуклої лінз і додатного меніска завжди додатні, а фокусні відстані двоввігнутої і плоско-ввігнутої лінз і від'ємного меніска завжди від'ємні.

Вказівка. Використайте матеріал підрозділу 3.1.

Задача 3.2. Визначте амплітудний коефіцієнт пропускання додатної і від'ємної циліндричних лінз. Дослідіть, як впливає додатна циліндрична лінза на плоску хвилю, що поширюється уздовж оптичної осі лінзи.

Відповідь: $t_l(x, y) = \exp\left(\pm j \frac{\pi y^2}{\lambda f}\right)$, де знаки $\langle - \rangle$ та $\langle + \rangle$ використовують для додатної та від'ємної лінз відповідно.

Задача 3.3*. Доведіть, що в параксіальному наближенні амплітудний коефіцієнт пропускання тонкої лінзи, що являє собою частину конусу (рис. 3.10), має вигляд

$$t_l(x, y) = \exp\left\{jk\left[nd_0 - \frac{(n-1)Ry}{l} - \frac{x^2}{2f(y)}\right]\right\},$$

де n – показник заломлення; $f(y) = R(l - y)/l(n - 1)$.

Дослідіть, як впливає тонка лінза на плоску хвилю, що поширюється у напрямку, перпендикулярному до площини xu .

Задача 3.4*. Амплітудний коефіцієнт пропускання екрана описується функцією, що має осьову симетрію,

$$t_o(r) = \frac{1}{2} [1 + \cos(\alpha r^2)] \text{circ}\left(\frac{r}{l}\right).$$

Доведіть, що такий екран діє подібно до лінзи. Знайдіть фокусну відстань цієї лінзи.

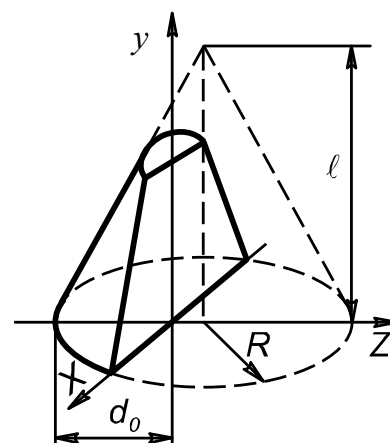


Рис. 3.10. До задачі 3.3
(схема конусоподібної лінзи)

Які особливості можуть сильно обмежити застосування цього екрана як системи, яка створює зображення, особливо для поліхроматичних предметів?

Вказівка. Скористайтесь прикладами 3.1 та 3.2.

Відповідь: $f = \frac{\pi}{\alpha \lambda}$.

Задача 3.5.* Плоский екран з амплітудним коефіцієнтом пропускання

$$t_o(r) = \frac{1}{2} [1 + \text{sng}(\cos \alpha r^2)] \text{circ}\left(\frac{r}{l}\right)$$

(де $\text{sng}(z)$ — функція знака) освітлений монохроматичною плоскою хвилею одиничної амплітуди,

$$\text{sng}(z) = \begin{cases} 1, & \text{коли } z > 0; \\ 0, & \text{коли } z = 0; \\ -1, & \text{коли } z < 0. \end{cases}$$

Доведіть, що такий екран діє як лінза із множиною фокусних відстаней. Визначте значення цих фокусних відстаней і відносні значення енергії, яка переноситься через фокус у відповідні фокальні площини. Екран, що розглядається, називають *зонною пластиною Френеля*.

Вказівка. Скористайтесь прикладами 3.1 та 3.2.

Відповідь: $f_m = \frac{\pi}{\alpha \lambda (2m+1)}$, $\frac{I_m}{I_1} = \left(\frac{1}{2m+1}\right)^2$.

Задача 3.6.* Амплітудний коефіцієнт пропускання зонно-лінзової ґратки визначають за виразом $t_o(x, y) = [1 + \cos(\alpha x^2)]/2$ для всіх y , де α — постійний параметр ґратки.

Доведіть, що таке пропускання можна отримати за допомогою трьох лінз: плоскої, увігнутої та опуклої циліндричної. Визначте відповідні фокусні відстані зонно-лінзової ґратки. Знайдіть розподіл поля у задній фокальній площині зонно-лінзової ґратки, якщо вона освітлюється нормально падаючою плоскою монохроматичною хвилею.

Відповідь: $I(x_0, y_0) = I_0 \left[\exp\left(-\frac{\pi}{\alpha \lambda} x_0^2\right) \right]$.

Задача 3.7. Плоска монохроматична хвиля одиничної амплітуди нормально падає на додатну лінзу, діаметр якої становить 5 см, а фоку-

сна відстань 2 м (рис. 3.11). На відстані 1 м за лінзою на її осі розміщено предмет, амплітудний коефіцієнт пропускання якого

$$t_0(x, y) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\pi \nu_0 x) \operatorname{rect}\left(\frac{x}{l}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{y}{l}\right).$$

Знайдіть розподіл інтенсивності у фокальній площині лінзи. Побудуйте графік цього розподілу вздовж осі x , якщо $\nu_0 = 100 \text{ см}^{-1}$, а $l = 1 \text{ м}$.

Вказівка. Скористайтесь прикладом 3.3.

$$\begin{aligned} \text{Відповідь: } I(x_4, y_4) = & \left(\frac{\pi D^2 p}{\lambda f}\right)^2 \left\{ \frac{1}{4} \left[2 \frac{J_1\left(\frac{\pi D p}{\lambda l_{34}} \sqrt{x_4^2 + y_4^2}\right)}{\frac{\pi D p}{\lambda l_{34}} \sqrt{x_4^2 + y_4^2}} \right]^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{16} \left[2 \frac{J_1\left(\frac{\pi D p}{\lambda l_{34}} \sqrt{(x_4 - \lambda l_{34} \nu_0)^2 + y_4^2}\right)}{\frac{\pi D p}{\lambda l_{34}} \sqrt{(x_4 - \lambda l_{34} \nu_0)^2 + y_4^2}} \right]^2 + \frac{1}{16} \left[2 \frac{J_1\left(\frac{\pi D p}{\lambda l_{34}} \sqrt{(x_4 + \lambda l_{34} \nu_0)^2 + y_4^2}\right)}{\frac{\pi D p}{\lambda l_{34}} \sqrt{(x_4 + \lambda l_{34} \nu_0)^2 + y_4^2}} \right]^2 \right\}. \end{aligned}$$

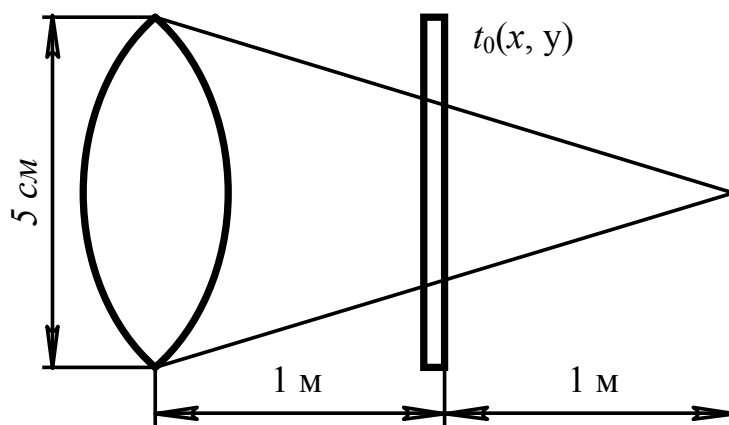


Рис. 3.11. До задачі 3.7

Задача 3.8. Предмет, обмежений круглою діафрагмою діаметром d , розміщений у передній фокальній площині додатної лінзи діаметром D . Розподіл інтенсивності вимірюється у задній фокальній площині лінзи. Передбачається, що $d \ll D$.

Знайдіть вираз для максимальної просторової частоти, для якої вимірювана інтенсивність точно дорівнює квадрату модуля спектра Фур'є предмета. Чому дорівнює ця частота, якщо $D = 4 \text{ см}$, $d = 2 \text{ см}$, фокусна відстань $f = 50 \text{ мм}$, $\lambda = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}$? Визначте значення частоти, вище

якого виміряний спектр зникає, незважаючи на те, що спектр предмета може мати відмінні від нуля співвідношення на більш високих частотах.

$$\text{Відповідь: } \nu_{x,\max 1} = \frac{D-d}{2\lambda f} = 333 \text{ мм}^{-1}; \nu_{x,\max 2} = \frac{D+d}{2\lambda f} = 10^3 \text{ мм}^{-1}.$$

Задача 3.9. Предмет являє собою набір одновимірних функцій $t_o(x, y_k)$, де y_1, y_2, \dots, y_N – це N фіксованих y -координат. Виконавши перетворення Фур'є для всіх N функцій у напрямку x , отримаємо ряд перетворень

$$T_o(\nu_x, y_k) = \int_{-\infty}^{\infty} t_o(x, y_k) \exp(-j2\pi\nu_x x) dx.$$

Нехтуючи кінцевими розмірами лінзи і предмета й використовуючи властивості лінз, що розглядаються, як елементи, які виконують перетворення Фур'є, доведіть, що здійснити таке перетворення можна за допомогою двох циліндричних лінз з різними фокусними відстанями, циліндричної і сферичної лінз з однаковими фокусними відстанями.

Примітка. Слід знайти тільки $|T_o|^2$, тому фазовими множниками можна знехтувати.

Задача 3.10. Нормально падаюча плоска монохроматична хвиля одиничної амплітуди освітлює предмет, максимальний лінійний розмір якого дорівнює d . Предмет встановлений безпосередньо перед додатною лінзою з фокусною відстанню f , діаметр лінзи перевищує d . Через похибку установки розподіл інтенсивності вимірюється у площині, що перебуває на відстані $f - \Delta$ за лінзою (рис. 3.12). Наскільки малою має бути похибка Δ , якщо розподіл інтенсивності, що вимірюється, має точно відтворювати картину дифракції Фраунгофера на предметі?

$$\text{Відповідь: } I(x_0, y_0) = \left(\frac{d}{\lambda f}\right)^2 \left[\text{sinc}\left(\frac{d}{\lambda f} x_0\right)\right]^4.$$

Задача 3.11. Плоска монохроматична хвиля падає під кутом 45° на екран, який має отвір у вигляді великої щілини (рис. 3.13). Додатна лінза розміщена безпосередньо за екраном. Визначте дифракційну картину в задній фокальній площині лінзи.

Відповідь: $I_n(y_4) = \text{sinc}^2 \left[\frac{b}{\lambda f'} (y_4 - f') \right]$.

Задача 3.12*. У передній фокальній площині об'єктива з фокусною відстанню $f = 100$ мм встановлено круглу діафрагму з радіусом r_0 . Діафрагма освітлюється гауссовим лазерним пучком, який має у площині діафрагми діаметр $2\omega_l$. Визначте розподіл інтенсивності у задній фокальній площині об'єктива. Побудуйте графік цього розподілу, якщо довжина хвилі випромінювання лазера $\lambda = 0,63$ мкм; $r_0 = 2$ мм; $\omega_l = 2$ мм або $\omega_l = 4$ мм. Порівняйте отримані результати для випадку рівномірного освітлення діафрагми. Визначите радіус кружка Ері.

Вказівка. Скористайтесь прикладом 3.2.

Відповідь:

$$I(r_4) = |V(r_4)|^2 = \left(\frac{V_0 \pi^2 \omega_l^2 r_0^2}{\lambda f} \right)^2 \left\{ \exp \left[- \left(\frac{2\pi \omega_l}{\lambda f} \right)^2 r_4^2 \right] * \left[2 \frac{J_1 \left(\frac{2\pi r_0}{\lambda f} r_4 \right)}{\frac{2\pi r_0}{\lambda f} r_4} \right] \right\}^2.$$

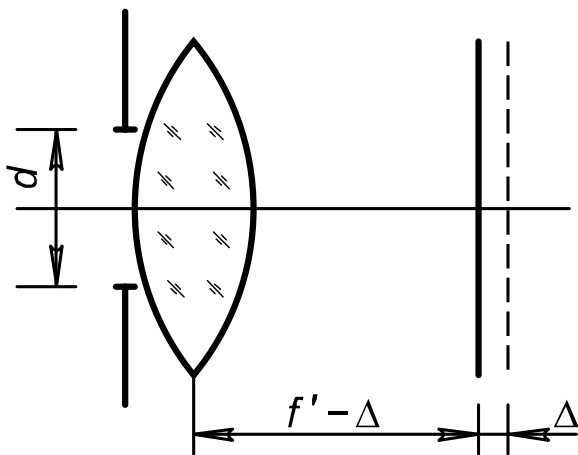


Рис. 3.12. До задачі 3.10

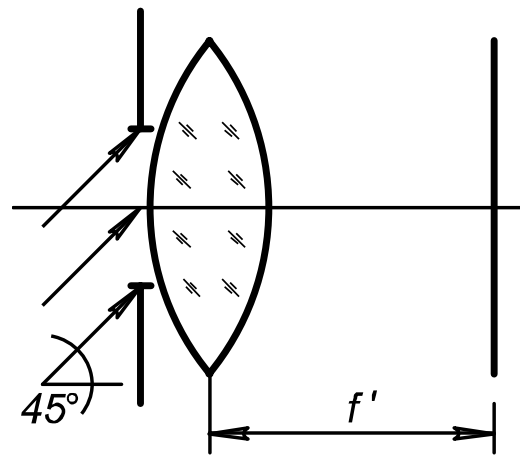


Рис. 3.13. До задачі 3.11

Задача 3.13. Зірковий інтерферометр Майкельсона подано на рис. 3.14. Екран із двома паралельними щілинами, на якому відбувається дифракція світла, встановлений перед лінзою об'єктива телескопа. Світло від дальньої зірки входить в одну із щілин після відбивання від дзеркал 311 та 312, а в іншу щілину від дзеркал 321 та 322. Перед лінзою розміщено вузькосмуговий світлофільтр, який пропускає випромінювання з дов-

жиною хвилі λ . Нехай a та b – відстані між щілинами і дзеркалами, а f – фокусна відстань лінзи. Визначте положення максимумів і мінімумів інтенсивності у задній фокальній площині лінзи, коли зірка розміщена: на осі телескопа; під невеликим кутом θ_0 до осі телескопа у напрямку, перпендикулярному до щілин.

Відповідь: $\varphi_{dm,min} = \frac{\lambda}{b}m + \theta_0$.

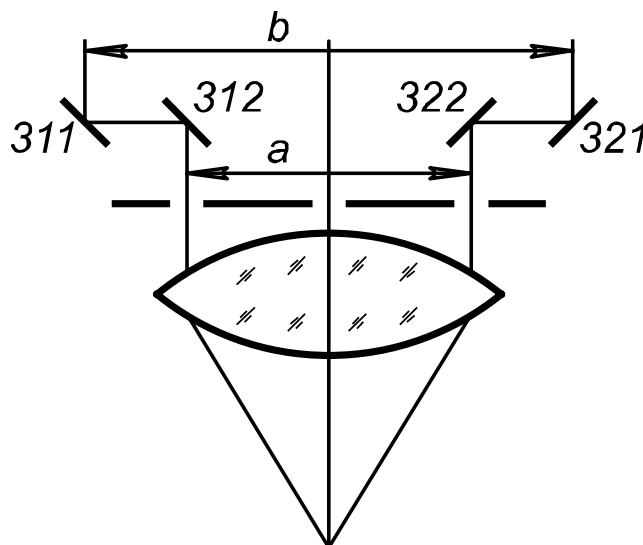


Рис. 3.14. До задачі 3.13 (схема зіркового інтерферометра Майкельсона)

Задача 3.14. У передній фокальній площині об'єктива з фокусною відстанню $f = 100$ мм розміщено сітку, коефіцієнт пропускання якої знаходять за виразом

$$t_o(x,y) = \frac{1}{2} \text{rect}\left(\frac{x}{A}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{B}\right) \begin{cases} 1, \text{коли } 2na \leq x \leq (2n+1)a; \\ 0 \text{ в інших випадках,} \end{cases}$$

де $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm N$.

Визначте розподіл освітленості у задній фокальній площині об'єктива, якщо на ґратку нормально падає плоска монохроматична хвиля довжиною $\lambda = 0,5$ мкм. Побудуйте графіки нормованого розподілу інтенсивності уздовж осей x та y , якщо $A = 20$ мм, $B = 10$ мм, $a = 0,5$ мм.

Відповідь: $I(x_4, y_4) = \left(\frac{V_p}{\lambda f}\right)^2 [(2N+1)aB]^2 \left\{ \frac{\text{sinc}\left[\frac{2a}{\lambda f}(2N+1)x_4\right]}{\cos\left[\frac{a}{\lambda f}x_4\right]} \right\}^2 \text{sinc}^2\left(\frac{B}{\lambda f}y_4\right)$.

РОЗДІЛ 4. ЧАСТОТНИЙ АНАЛІЗ ДИФРАКЦІЙНО ОБМЕЖЕНИХ ОПТИЧНИХ СИСТЕМ

Просторово-частотний аналіз оптичних систем почали застосовувати наприкінці 30-х років XX ст., коли стали використовувати синусоїдальні міри для аналізу та розрахунку систем. Цими роботами зацікавились завдяки застосуванню теорії лінійних систем і теорії зв'язку для аналізу й удосконалення об'єктивів телевізійних камер. Однак методи Фур'є-оптики були закладені ще в роботах Аббе (1840–1905) і Релея (1842–1913).

Розглянемо застосування методів просторово-частотного аналізу оптичних систем, в яких немає аберації, для випадків когерентного й некогерентного випромінювання.

4.1. Узагальнена модель оптичної системи, яка формує зображення

У підрозділі 3.3 було розглянуто дифракційну теорію формування зображення тонкою додатною лінзою в умовах монохроматичного освітлення. Реальна оптична система складається, зазвичай, із додатних і від'ємних лінз. Розглянемо оптичні системи, які формують зображення (об'єктив, проекційну систему, мікроскоп–око; телескоп–око). Для аналізу властивостей складних оптичних систем доцільно ввести поняття узагальненої моделі оптичної системи.

Схему формування зображення в довільній оптичній системі зображено на рис. 4.1. Перехід від реальної системи до узагальненої моделі відбувається заміною сукупності лінз формальною системою, яка перетворює вхідний сигнал у вихідний. При цьому як вхідний сигнал розглядається розподіл поля у вхідній зіниці, а вихідним сигналом служить розподіл поля у вихідній зіниці.

Вхідна зіниця являє собою отвір обмежених розмірів (уявний або дійсний), через який проходить випромінювання і потрапляє на оптичні

елементи, що формують зображення. *Вихідна зіниця* являє собою отвір обмежених розмірів (уявний або дійсний), через який випромінювання виходить із оптичної системи і формує зображення.

Вважатимемо, що поширення випромінювання від вхідної зіниці до вихідної з достатньою точністю описує геометрична оптика, що не потребує врахування дифракційних ефектів. Дифракційні ефекти слід враховувати тільки на шляху від об'єкта до вхідної зіниці (згідно з теорією Аббе) або від вихідної зіниці до площини зображення (теорія Релея). Надалі вплив дифракційних ефектів будемо враховувати на шляху від вихідної зіниці до зображення. Зазначимо також, що вихідна зіниця оптичної системи є зображенням вхідної зіниці, і навпаки.

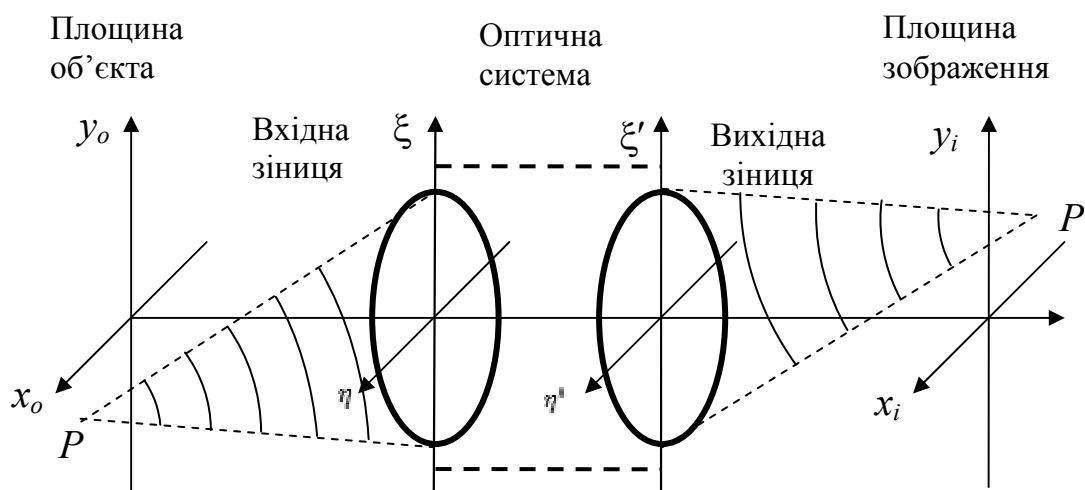


Рис. 4.1. Узагальнена модель оптичної системи, яка формує зображення

Тоді відповідно до загального визначення системи узагальнену модель можна подати формально у вигляді деякого блока (зображено на рис. 4.1 пунктиром), який здійснює перетворення розподілу поля у площині вхідної зіниці у розподіл поля у площині вихідної зіниці. З таким блоком можна пов'язати деякий математичний оператор, який описує з позиції геометричної оптики перетворення хвильового фронту під час переходу від вхідної зіниці до вихідної.

Якщо довжина оптичного шляху кожного променя, який виходить із точки P , проходить через всю оптичну систему і потрапляє в точку P' ,

залишається незмінною, то із вихідної зіниці поширюватиметься сферична хвиля, яка сходиться в точці P' (рис. 4.1). У цьому випадку в оптичній системі немає аберацій, а саму систему називають дифракційно обмеженою.

Отже, під *дифракційно обмеженою оптичною системою* будемо розуміти таку систему, яка має обмежений розмір вихідної зіниці і в наближенні геометричної оптики перетворює сферичну хвилю, що розходиться із будь-якого точкового джерела, в нову ідеальну сферичну хвилю, що сходиться в точці, яка належить площині зображення.

У реальних оптичних системах фронт хвилі від точкового джерела після вихідної зіниці значно відрізняється від ідеальної сферичної форми, тоді в оптичній системі є *аберації*.

Ідеальною оптичною системою називають таку систему, в якій немає аберацій і не враховуються дифракційні ефекти.

4.2. Когерентні й некогерентні оптичні системи

У розділах 2 і 3 зазначалось, що світлова хвиля є строго монохроматичною. Реальні джерела випромінювання не бувають строго монохроматичними. Статистичний характер зміни амплітуди і фази оптичного випромінювання може відчутно впливати на властивості оптичної системи, що створює зображення.

Якщо зміна амплітуди й фази мають випадковий характер, світлове поле можна задовільно описати за допомогою ймовірнісних характеристик. Відомо, що кожна точка об'єкта обумовлює певний імпульсний відгук у площині зображення. Коли амплітуда й фаза в точці об'єкта змінюються випадковим чином, так само буде змінюватися імпульсний відгук у відповідних точках зображення. Тому статистичні залежності між амплітудами в різних точках об'єкта будуть зумовлювати статистичні залежності між відповідними імпульсними відгуками у площині зображення.

Надалі під час вивчення властивостей оптичних систем розглядатимемо тільки два граничні випадки когерентної і некогерентної оптичної системи. При цьому *когерентною оптичною системою* будемо називати систему, в якій використовується когерентне джерело випромінювання (лазер). *Некогерентною оптичною системою* називатимемо систему, в якій використовується некогерентне випромінювання.

4.2.1. Когерентне випромінювання

Когерентність випромінювання можна визначити як здатність випромінювання формувати стабільну інтерференційну картину. Випромінювання називають *когерентним*, якщо різниця фаз у двох довільних точках залишається незмінною за час спостереження. Якщо в будь-який момент часу різниця фаз залишається незмінною у двох довільних точках простору, то таке випромінювання називають *просторово когерентним*. Якщо дві світлові хвилі, зміщені у часі, складаються в одній точці і при цьому різниця фаз між ними залишається незмінною, то такому випромінюванню властива *часова когерентність*.

Більш строге математичне визначення когерентності можна дати на основі кореляційної функції випромінювання. Простіша із них описує часову когерентність і визначає кореляцію Γ_{11} між комплексними амплітудами поля $V(\vec{r}_1, t)$ та $V(\vec{r}_1, t + \tau)$ в одній і тій самій точці $P(\vec{r}_1)$, але розділеними у часі інтервалом τ :

$$\Gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T V(\vec{r}_1, t + \tau) V^*(\vec{r}_1, t) dt. \quad (4.1)$$

Функція (4.1) являє собою автокореляційну функцію амплітуди поля $V(\vec{r}_1, t)$ або середнє значення добутку $V(\vec{r}_1, t + \tau) V^*(\vec{r}_1, t)$, тобто

$$\Gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau) = \langle V(\vec{r}_1, t + \tau) V^*(\vec{r}_1, t) \rangle. \quad (4.2)$$

Знайдемо нормовану автокореляційну функцію, використовуючи (4.2):

$$\gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau) = \frac{\Gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau)}{\langle V(\vec{r}_1, t) V^*(\vec{r}_1, t) \rangle} = \frac{\Gamma_{11}}{I(\vec{r}_1)}, \quad (4.3)$$

де $I(\vec{r}_1)$ – інтенсивність випромінювання в точці $P(\vec{r}_1)$.

Можна побачити, що функція (4.3) має такі властивості:

- $\gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, 0) = 1$;
- $|\gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau)| \leq 1$;
- $\gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, -\tau) = \gamma_{11}^*(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau)$.

Функцію $\gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau)$ називають *комплексною мірою часової когерентності*. Модуль цієї функції $|\gamma_{11}|$ називають *мірою часової когерентності*. Очевидно Γ_{11} , а відповідно і γ_{11} , являють собою міру кореляції, яка спостерігається між комплексними амплітудами в одній і тій самій точці простору для двох моментів часу, роз'єднаних інтервалом τ . Якщо часової когерентності зовсім немає, то $\gamma_{11} = 0$. Для випадку повної когерентності, наприклад для нескінченно довгої гармонічної хвилі, $V(\vec{r}_1, t) = V_0(\vec{r}_1) \exp(-j2\pi\nu t)$, $|\gamma_{11}(\tau)| = 1$ для будь-яких значень часового зміщення τ . Функцію $|\gamma_{11}(\tau)|$ подано на рис. 4.2, а. Із графіка функції $|\gamma_{11}(\tau)|$ можна знайти *час когерентності* τ_c , за якого величина $|\gamma_{11}(\tau)|$ зменшується вдвоє, тобто $|\gamma_{11}(\tau)| = 0,5$. Для повністю когерентної хвилі $\tau_c = \infty$, а для повністю некогерентної хвилі $\tau_c = 0$.

Аналогічно можна визначити кореляційну функцію світлового поля між двома різними точками $P(\vec{r}_1)$ і $P(\vec{r}_2)$ в один і той самий момент часу:

$$\Gamma_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0) = \langle V(\vec{r}_1, t) V^*(\vec{r}_2, t) \rangle. \quad (4.4)$$

Відповідна нормована функція із врахуванням (4.4) має вигляд

$$\gamma_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{\Gamma_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0)}{\sqrt{\Gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, 0) \Gamma_{22}(\vec{r}_2, \vec{r}_2, 0)}}. \quad (4.5)$$

Функцію (4.5) називають *комплексною мірою просторової когерентності*. Модуль цієї функції $|\gamma_{12}|$ називають *мірою просторової когерентності*. Ця функція має властивості, аналогічні функції γ_{11} . Функцію $|\gamma_{12}|$ зображено на рис. 4.2, б. Якщо координата \vec{r}_1 фіксована,

то на деякій характерній довжині $d_c = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ величина $\gamma_{12}(d_c) = 0$. Параметр d_c називають *довжиною просторової когерентності* хвилі у точці $P(\vec{r}_1)$.

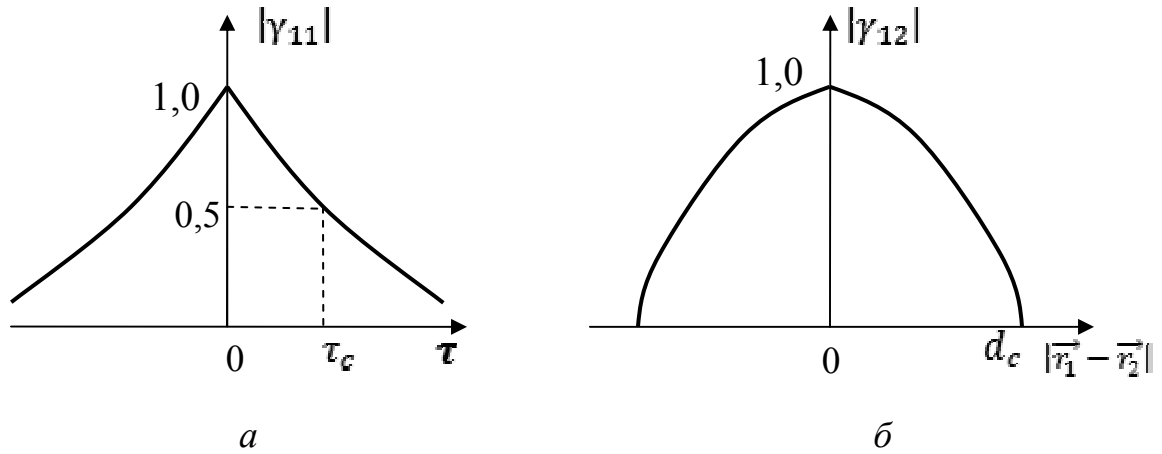


Рис. 4.2. Можливі залежності:

a – міра часової когерентності $|\gamma_{11}|$; b – міра просторової когерентності $|\gamma_{12}|$

Поняття просторової і часової когерентності можна об'єднати за допомогою функції взаємної когерентності, яку визначають таким чином:

$$\Gamma_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \langle V(\vec{r}_1, t + \tau) V^*(\vec{r}_2, t) \rangle, \quad (4.6)$$

яку можна подати також у нормованому вигляді:

$$\gamma_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \frac{\Gamma_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, 0) \Gamma_{22}(\vec{r}_2, \vec{r}_2, 0)}}. \quad (4.7)$$

Ця функція, яку називають *комплексною мірою когерентності*, визначає когерентність між двома різними точками хвилі у різні моменти часу.

Поняття часової когерентності тісно пов'язане з монохроматичністю випромінювання. Наприклад, чим більша міра когерентності хвилі, тим більша її монохроматичність. Іншими словами, час когерентності τ_c обернено пропорційний ширині $\Delta\nu$ смуги частот випромінювання, тобто $\tau_c \sim 1 / \Delta\nu$.

4.2.2. Вимірювання міри когерентності випромінювання

Найбільш простим способом вимірювання міри просторової когерентності між двома точками світлової хвилі є метод, в якому використовується інтерферометр Юнга (рис. 4.3). Інтерферометр складається з екрана 1, який має отвори (щілини) з координатами x_1 та x_2 , та екрана 2, на якому випромінювання, що пройшло через отвори, утворює інтерференційну картину. Інтерференційні смуги на екрані 2 будуть тим чіткішими, чим краще зберігаються у фазі дві амплітуди $V(x_1, \tau_1 = d_1/c)$ і $V(x_2, \tau_2 = d_2/c)$, де d_1 і d_2 – відстані від отворів x_1 та x_2 до точки на екрані 2; c – швидкість світла.

Отже, контрастність інтерференційних смуг визначає міру когерентності між точками x_1 і x_2 . Визначимо контрастність смуг $\mathcal{C}(P)$ у точці P таким чином:

$$\mathcal{C}(P) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (4.8)$$

де I_{\max} та I_{\min} – максимальна і мінімальна інтенсивності в околі точки P .

Якщо обидва отвори, x_1 і x_2 , створюють однакову освітленість у точці P , а відповідні дві хвилі мають повну просторову і часову когерентність, то $I_{\min} = 0$, а контрастність смуг $\mathcal{C}(P) = 1$. У випадку, коли випромінювання в точках x_1 та x_2 повністю некогерентне, то $I_{\max} = I_{\min}$, смуги зникають, а контрастність смуг $\mathcal{C}(P) = 0$.

Розрахуємо контрастність смуг для частково когерентного випромінювання. Визначимо інтенсивність поля в точці P як $I(P) = \langle |V(P)|^2 \rangle$, де $V(P)$ – світлове поле, яке утворене випромінюванням, що поширюється із точок x_1 та x_2 , тобто

$$V(P) = V(x_1, \tau_1 = d_1/c) + V(x_2, \tau_2 = d_2/c). \quad (4.9)$$

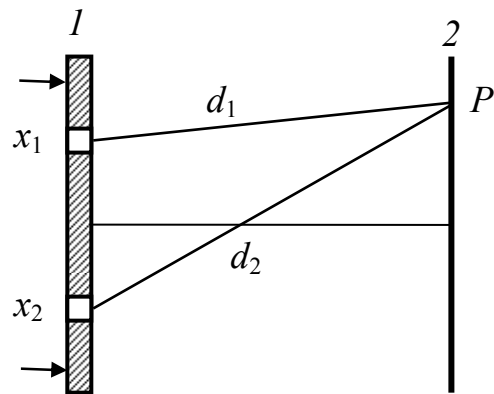


Рис. 4.3. Схема інтерферометра Юнга для вимірювання ступеня просторової когерентності

Тоді з урахуванням виразів (4.6) і (4.9) матимемо:

$$\begin{aligned}
 I(P) &= \langle |V(x_1, \tau_1 = d_1/c) + V(x_2, \tau_2 = d_2/c)|^2 \rangle = \\
 &= \langle |V(x_1, \tau_1 = d_1/c)|^2 \rangle + \langle |V(x_2, \tau_2 = d_2/c)|^2 \rangle + \\
 &\quad + \langle V(x_1, \tau_1 = d_1/c)V^*(x_2, \tau_2 = d_2/c) \rangle + \\
 &\quad + \langle V^*(x_1, \tau_1 = d_1/c)V(x_2, \tau_2 = d_2/c) \rangle = \\
 &= I(x_1) + I(x_2) + \Gamma_{12}^*[x_1, x_2, (d_1 - d_2)/c] + \Gamma_{12}[x_1, x_2, (d_1 - d_2)/c]. \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

Комплексну функцію Γ_{12} подамо у вигляді $\Gamma_{12} = |\Gamma_{12}|e^{j\varphi_{12}}$. Тоді

$$\Gamma_{12}^* + \Gamma_{12} = |\Gamma_{12}|e^{j\varphi_{12}} + |\Gamma_{12}|e^{-j\varphi_{12}} = 2|\Gamma_{12}|\cos\varphi_{12}. \quad (4.11)$$

З урахуванням виразів (4.7), (4.10) та (4.11) інтенсивність в околі точки P має значення

$$I_{max} = I(x_1) + I(x_2) + 2\sqrt{I(x_1)I(x_2)}|\gamma_{12}(x_1, x_2, \tau)|; \quad (4.12)$$

$$I_{min} = I(x_1) + I(x_2) - 2\sqrt{I(x_1)I(x_2)}|\gamma_{12}(x_1, x_2, \tau)|. \quad (4.13)$$

Після підстановки інтенсивностей (4.12) і (4.13) у формулу (4.8) маємо:

$$C(P) = \frac{2\sqrt{I(x_1)I(x_2)}}{I(x_1) + I(x_2)}|\gamma_{12}(x_1, x_2, \tau)|. \quad (4.14)$$

Якщо $I(x_1) = I(x_2)$, то $C(P) = |\gamma_{12}(x_1, x_2, \tau)|$. При цьому, коли $d_1 = d_2$, тобто $\tau = 0$, вираз (4.14) визначає міру просторової когерентності між точками x_1 та x_2 .

Часову когерентність найбільш просто можна виміряти за допомогою інтерферометра Майкельсона (рис. 4.4).

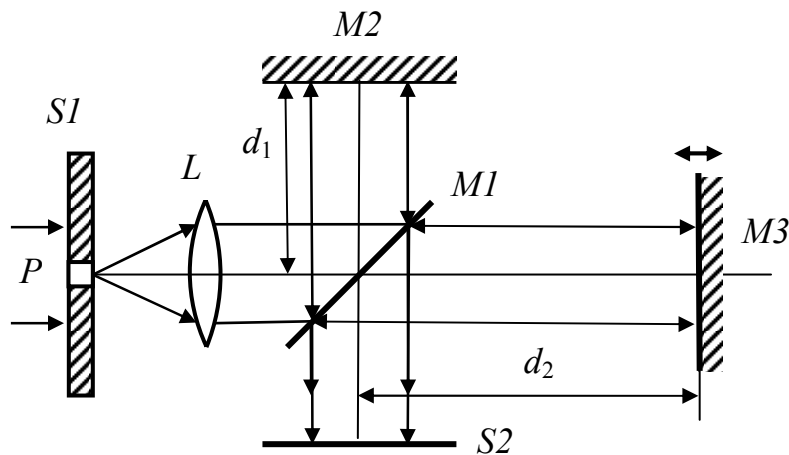


Рис. 4.4. Інтерферометр Майкельсона для вимірювання ступеня часової когерентності у точці P

Схема установки складається з екрана $S1$ з невеликим отвором у точці P , яка збігається з переднім фокусом лінзи L . Лінза перетворює сферичну хвилю у плоску. Ця хвиля, проходячи через напівпрозору пластину $M1$, розділяється на два паралельних пучка, які після відбивання від дзеркал $M2$ і $M3$ за допомогою пластини $M1$ знову поширюються в одному напрямку. На екрані $S2$ буде спостерігатись інтерференційна картина у вигляді концентричних кілець. Очевидно, що така інтерференція спостерігатиметься тільки доти, поки різниця $2(d_1 - d_2)$ не збільшиться настільки, що обидва пучки стануть некорельованими по фазі. Як і з інтерферометром Юнга, можна вважати, що контрастність інтерференційної картини

$$C(P) = |\gamma_{11}(P, P, \tau)|, \quad (4.15)$$

де $\tau = 2(d_1 - d_2)/c$.

Отже, вимірювання контрастності інтерференційних кілець (4.15) дає змогу отримати міру часової когерентності випромінювання у точці P . Можна також знайти *довжину часової когерентності* $d_{ct} = c\tau_c$, для якої $C(P) = |\gamma_{11}(P, P, \tau_c)| = 0,5$.

4.2.3. Некогерентне випромінювання

Якщо амплітуда і фаза світлового поля у довільних точках простору в певний момент часу змінюються за статистично незалежними законами, то таке випромінювання називають *некогерентним*. Реальні джерела випромінювання, крім лазерів, є некогерентними, а їх комплексна міра когерентності $\gamma_{11}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)$ близька до нуля. Некогерентне випромінювання не може бути строго монохроматичним.

Для повністю некогерентного випромінювання з $\Gamma_{12} = 0$ інтенсивність двох світлових хвиль у точці P згідно з (4.10) становить

$$I(P) = I(\vec{r}_1) + I(\vec{r}_2). \quad (4.16)$$

4.3. Дифракційно обмежена когерентна оптична система

У когерентній оптичній системі різні імпульсні відгуки у площині зображення змінюються одночасно і, як наслідок, їх комплексні амплітуди поля мають додаватися, оскільки їх фази строго узгоджені між собою. Тому когерентна оптична система, що формує зображення, буде лінійною відносно комплексних амплітуд поля.

Використовуючи результати параграфу 3.3.3, які були отримані для монохроматичного випромінювання, амплітуду поля $V_i(x_i, y_i)$ у площині зображення когерентної системи можна подати у вигляді неперервної суми зважених імпульсних відгуків $h_n(x_i, y_i)$:

$$V_i(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{\infty} h_n(x_i - x_{io}, y_i - y_{io}) V_{ig}(x_{io}, y_{io}) dx_{io} dy_{io}. \quad (4.17)$$

Вираз (4.17) встановлює зв'язок між вихідним полем $V_i(x_i, y_i)$ когерентної просторово-інваріантної системи та ідеальним зображенням $V_{ig}(x_{io}, y_{io})$ цієї системи (див. вираз (3.71)). Він являє собою згортку імпульсного відгуку h_n та ідеального зображення V_{ig} , що дозволяє розглядати таку систему в області просторових частот.

Застосовуючи теореми згортки до виразу (4.17) [6], знаходимо, що

$$\tilde{V}_i(v_x, v_y) = H(v_x, v_y) \tilde{V}_{ig}(v_x, v_y), \quad (4.18)$$

де $\tilde{V}(v_x, v_y)$ та $\tilde{V}_{ig}(v_x, v_y)$ – просторово-частотні спектри розподілу амплітуди поля у площині зображення реальної та ідеальної оптичних систем,

$$\tilde{V}_i(v_x, v_y) = F\{V_i\} = \iint_{-\infty}^{\infty} V_i(x_i, y_i) \exp[-j2\pi(v_x x_i + v_y y_i)] dx_i dy_i; \quad (4.19)$$

$$\tilde{V}_{ig}(v_x, v_y) = F\{V_{ig}\} = \iint_{-\infty}^{\infty} V_{ig}(x_i, y_i) \exp[-j2\pi(v_x x_i + v_y y_i)] dx_i dy_i; \quad (4.20)$$

$H(v_x, v_y)$ – когерентна передавальна функція (КПФ) системи, яка являє собою перетворення Фур'є просторово-інваріантного когерентного імпульсного відгуку (функції розсіювання точки) h_n ;

$$H(v_x, v_y) = F\{h_n\} = \iint_{-\infty}^{\infty} h_n(x_i, y_i) \exp[-j2\pi(v_x x_i + v_y y_i)] dx_i dy_i; \quad (4.21)$$

$F\{\}$ – оператор перетворення Фур'є.

Встановимо зв'язок між КПФ і фізичними властивостями оптичної системи. Згідно з (3.70)

$$h_n(x_i, y_i) = F\{P(\lambda\alpha'v_x, \lambda\alpha'v_y)\}, \quad (4.22)$$

де P – функція вихідної зіниці системи (3.38); λ – довжина хвилі монохроматичного випромінювання; α' – відстань від вихідної зіниці до площини зображення. Інакше кажучи, імпульсний відгук являє собою перетворення Фур'є від функції вихідної зіниці.

Підставимо співвідношення (4.22) в інтеграл (4.21):

$$H(v_x, v_y) = F[h_n] = F\{F\{P\}\} = P(-\lambda\alpha'v_x, -\lambda\alpha'v_y). \quad (4.23)$$

Функція (4.23) описує частотні властивості дифракційно обмеженої когерентної оптичної системи. Оскільки згідно із системою (3.38) функція зіниці завжди дорівнює одиниці або нулю, то і КПФ має аналогічні властивості. Це означає, що в області просторових частот дифракційно обмежена когерентна система має обмежену смугу пропускання, у межах якої усі частотні складові пропускаються без спотворення амплітуди та фази. На межі цієї смуги пропускання КПФ відразу падає до нуля, а частотні складові за межами смуги пропускання повністю зникають.

Із функції (4.23) маємо, що КПФ являє собою дзеркальну функцію вихідної зіниці $P(-\xi', -\eta')$, в якій координати ξ' та η' замінюються на $\lambda\alpha'v_x$ та $\lambda\alpha'v_y$. Оскільки більшість оптичних систем мають вісь симетрії, то від'ємні знаки аргументів у функції (4.23) не мають істотного значення, тобто

$$H(v_x, v_y) = P(\lambda\alpha'v_x, \lambda\alpha'v_y). \quad (4.24)$$

Як приклад визначимо КПФ дифракційно обмеженої системи з прямокутною і круглою вихідними зіницями, для яких

$$P(\xi', \eta') = \begin{cases} 1, \text{ коли } |\xi'| \leq \frac{a}{2}, |\eta'| \leq \frac{b}{2}; \\ 0 \text{ в інших випадках;} \end{cases} \quad (4.25)$$

$$P(\xi', \eta') = \begin{cases} 1, \text{коли } \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2} \leq R_p; \\ 0 \text{ в інших випадках,} \end{cases} \quad (4.26)$$

де $a \times b$ – розмір прямокутної зіниці; R_p – радіус вихідної зіниці.

Тоді відповідно до виразу (4.24) КПФ таких систем описується виразами

$$H(v_x, v_y) = \begin{cases} 1, \text{коли } |v_x| \leq \frac{a}{2\lambda\alpha'}, |v_y| \leq \frac{b}{2\lambda\alpha'}; \\ 0 \text{ в інших випадках;} \end{cases} \quad (4.27)$$

$$H(v_x, v_y) = \begin{cases} 1, \text{коли } \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \leq R_p/\lambda\alpha'; \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases} \quad (4.28)$$

Графіки функцій (4.27) та (4.28) зображено на рис. 4.5. Із графіків видно, що в обох випадках існує гранична частота пропускання. Для оптичної системи з круглою вихідною зіницею маємо:

$$v_{r,max} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = R_p/2\lambda\alpha'. \quad (4.29)$$

Наприклад, якщо $R_p = 5 \text{ мм}$, $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$, $\alpha' = 100 \text{ мм}$, то $v_{r,max} = 100 \text{ мм}^{-1}$.

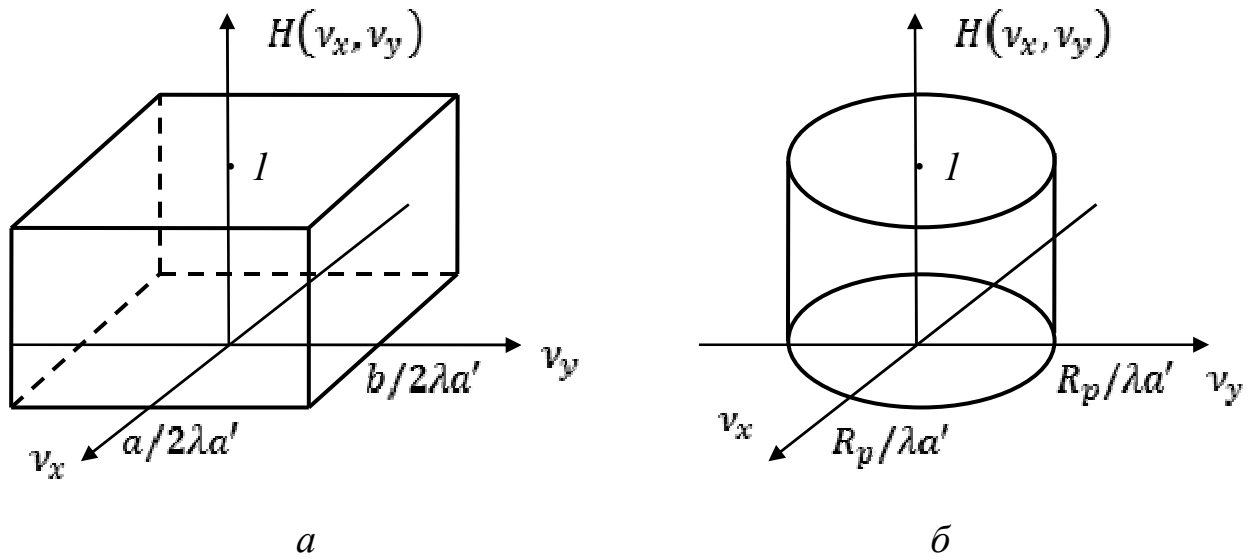


Рис. 4.5. Когерентні передавальні функції дифракційно обмежених оптичних систем з прямокутною (а) і круглою (б) вихідними зіницями

4.4. Дифракційно обмежена некогерентна оптична система

У некогерентній оптичній системі різні імпульсні відгуки у площині зображення змінюються за статистично незалежними законами і, як наслідок, повинні сумуватися їх інтенсивності $|h_n|^2$. Оскільки інтенсивність кожного некогерентного імпульсного відгуку пропорційна інтенсивності світла в точці об'єкта, що формує цей імпульсний відгук, то в некогерентній системі розподіл інтенсивності $I_i(x_i, y_i)$ у площині зображення являє собою зважену неперервну суму (4.16) некогерентних імпульсних відгуків $|h_n|^2$, тобто

$$I_i(x_i, y_i) = \langle |V_i(x_i, y_i)|^2 \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} |h_n(x_i - x_{io}, y_i - y_{io})|^2 I_{ig}(x_{io}, y_{io}) dx_{io} dy_{io}, \quad (4.30)$$

де $I_{ig}(x_i, y_i)$ – розподіл інтенсивності в ідеальному зображенні, $I_{ig}(x_i, y_i) = \langle |V_{ig}(x_i, y_i)|^2 \rangle$.

Отже, некогерентна оптична система є лінійною відносно інтенсивності. Крім того, інтенсивність зображення визначається як згортка інтенсивності ідеального зображення та імпульсного відгуку $|h_n|^2$.

4.4.1. Оптична передавальна функція та її основні властивості

Застосуємо теорему згортки до інтеграла (4.30). Тоді

$$\tilde{I}_i(v_x, v_y) = G(v_x, v_y) \tilde{I}_{ig}(v_x, v_y), \quad (4.31)$$

де $\tilde{I}_i(v_x, v_y)$, $\tilde{I}_{ig}(v_x, v_y)$ – просторово-частотні спектри розподілу інтенсивності поля у площині зображення реальної та ідеальної оптичних систем,

$$\tilde{I}_i(v_x, v_y) = F\{I_i\} = \iint_{-\infty}^{\infty} I_i(x_i, y_i) \exp[-j2\pi(v_x x_i + v_y y_i)] dx_i dy_i, \quad (4.32)$$

$$\tilde{I}_{ig}(v_x, v_y) = F\{I_{ig}\} = \iint_{-\infty}^{\infty} I_{ig}(x_i, y_i) \exp[-j2\pi(v_x x_i + v_y y_i)] dx_i dy_i; \quad (4.33)$$

$G(v_x, v_y)$ – передавальна функція некогерентної просторово-інваріантної оптичної системи,

$$G(v_x, v_y) = F\{|h_n|^2\} = \iint_{-\infty}^{\infty} |h_n(x_i, y_i)|^2 \exp[-j2\pi(v_x x_i + v_y y_i)] dx_i dy_i. \quad (4.34)$$

Подамо співвідношення (4.31) з урахуванням (4.32)–(4.34) у нормованому вигляді:

$$\tilde{I}_{in}(v_x, v_y) = G_n(v_x, v_y) \tilde{I}_{ign}(v_x, v_y), \quad (4.35)$$

де $I_{in}(v_x, v_y)$ та $I_{ign}(v_x, v_y)$ – нормовані просторово-частотні спектри реального та ідеального зображення,

$$\tilde{I}_{in}(v_x, v_y) = \frac{I_{in}(v_x, v_y)}{\tilde{I}_{in}(0,0)}, \quad \tilde{I}_{ign}(v_x, v_y) = \frac{I_{ign}(v_x, v_y)}{\tilde{I}_{ign}(0,0)}, \quad (4.36)$$

$G_n(v_x, v_y)$ – оптична передавальна функція (ОПФ),

$$G_n(v_x, v_y) = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} |h_n(x_i, y_i)|^2 \exp[-j2\pi(v_x x_i + v_y y_i)] dx_i dy_i}{\iint_{-\infty}^{\infty} |h_n(x_i, y_i)|^2 dx_i dy_i}. \quad (4.37)$$

Вираз (4.37) для ОПФ у загальному випадку є комплексною функцією, яку можна подати у вигляді

$$G_n(v_x, v_y) = M(v_x, v_y) \exp[j\Phi(v_x, v_y)]. \quad (4.38)$$

Модуль ОПФ (4.38) $M(v_x, v_y) = |G_n(v_x, v_y)|$ називають *модуляційною передавальною функцією* оптичної системи. Функцію $\Phi(v_x, v_y)$ називають *фазовою передавальною функцією*.

Із визначення ОПФ (4.37) можна отримати деякі властивості цієї функції, використовувані на практиці:

1. $G_n(0,0) = 1$.
2. $G_n(-v_x, -v_y) = G_n^*(v_x, v_y)$.
3. $M(v_x, v_y) \leq 1$.

4.4.2. Зв'язок оптичної передавальної функції з фізичними параметрами оптичної системи

Уведення поняття нормованих просторово-частотних спектрів $\tilde{I}_{in}(v_x, v_y)$ та $\tilde{I}_{ign}(v_x, v_y)$ має вичерпне фізичне обґрунтування. За визначенням інтенсивність $I = \langle V \cdot V^* \rangle$ є додатною величиною і завжди містить сталу складову або незмінний фон $\tilde{I}(0,0)$ (розподіл інтенсивності на нульовій просторовій частоті). Якість зображення, що формується некогерентною оптичною системою, визначається змінною інтенсивністю ділянок зобра-

ження по відношенню до незмінного фону, тому нормовані спектри інтенсивності визначають контраст об'єкта і його зображення.

Із співвідношення (4.35) маємо, що оптична передавальна функція показує, як оптична система погіршує контраст об'єкта.

Під час аналізу оптичних систем вхідним сигналом служить розподіл яскравості $L(x_o, y_o)$ у площині об'єкта, а вихідним – розподіл освітленості $E(x_i, y_i)$ у площині зображення. Для ідеальної оптичної системи справедливе співвідношення (3.67), яке, з урахуванням параметрів оптичної системи, можна подати у вигляді [7]:

$$E_g(x_{io}, y_{io}) = \pi \tau_o \sin^2 \sigma'_A \frac{1}{\beta^2} L\left(\frac{x_{io}}{\beta}, \frac{y_{io}}{\beta}\right), \quad (4.39)$$

де τ_o – інтегральний коефіцієнт пропускання оптичної системи; $2\sigma'_A$ – задній апертурний кут.

Тоді розподіл освітленості у площині зображення реальної некогерентної оптичної системи на основі інтеграла (4.30) з урахуванням (4.39) запишемо у вигляді

$$E(x_i, y_i) = \pi \tau_o \sin^2 \sigma'_A \frac{1}{\beta^2} \times \\ \times \iint_{-\infty}^{\infty} |h_n(x_i - x_{io}, y_i - y_{io})|^2 L(x_{io}/\beta, y_{io}/\beta) dx_{io} dy_{io}. \quad (4.40)$$

Застосувавши теорему згортки [8] до розподілу (4.40), знаходимо, що

$$\tilde{E}(v_x, v_y) = \pi \tau_o \sin^2 \sigma'_A G_n(v_x, v_y) \tilde{L}(\beta v_x, \beta v_y), \quad (4.41)$$

де \tilde{E} і \tilde{L} – просторові спектри розподілу освітленості у площині зображення та яскравості у площині об'єкта відповідно.

На основі отриманих виразів (4.40) і (4.41) некогерентну дифракційно обмежену оптичну систему можна розглядати як фільтр просторових частот з передавальною функцією $G_n(v_x, v_y)$.

Розглянемо розподіл освітленості в зображенні точкового джерела (рис. 4.6), яскравість якого визначається виразом

$$L(x_o, y_o) = L_0 \delta(x_o - x'_o, y_o - y'_o), \quad (4.42)$$

де L_0 – сталий параметр.

Після підстановки виразу (4.42) у (4.40) знаходимо, що освітленість зображення точкового джерела можна описати функцією

$$E(x_i, y_i) = \pi \tau_o \sin^2 \sigma_A' \frac{1}{\beta^2} |h_n(x_i - x'_{io}, y_i - y'_{io})|^2. \quad (4.43)$$

Світловий потік, який бере участь у формуванні зображення,

$$\Phi = \iint_{-\infty}^{\infty} \iint_{\Omega} \tau_o L(x_o, y_o) dx_o dy_o d\Omega = \pi L_o \tau_o \sin^2 \sigma_A, \quad (4.44)$$

де Ω – тілесний кут, у межах якого випромінювання від точкового джерела надходить до вхідної зіниці оптичної системи і бере участь у формуванні зображення; $2\sigma_A$ – передній апертурний кут оптичної системи.

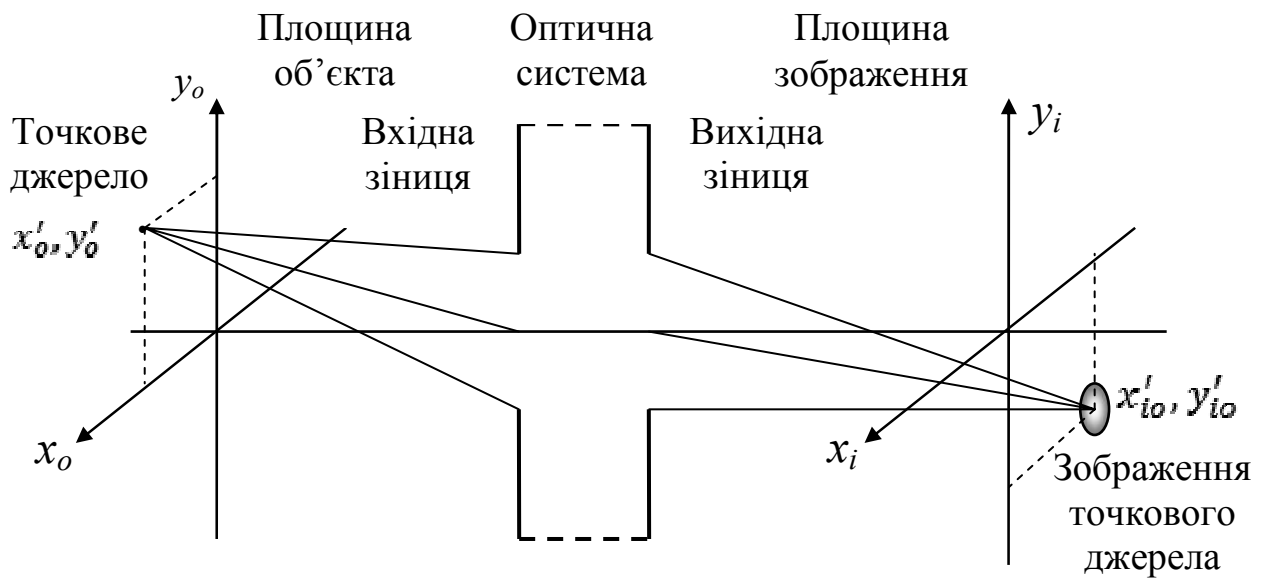


Рис. 4.6. До визначення імпульсного відгуку (функції розсіювання точки) некогерентної оптичної системи

Із порівняння виразів (4.43) і (4.44) знаходимо

$$|h_n(x_i - x'_{io}, y_i - y'_{io})|^2 = \frac{1}{\Phi} E(x_i, y_i). \quad (4.45)$$

Отже, імпульсний відгук некогерентної оптичної системи (4.45) являє собою нормований розподіл освітленості в зображенні точкового джерела. Іноді $|h_n|^2$ називають *функцією розсіювання точки* (ФРТ – PSF – Point Spread Function) оптичної системи.

Оскільки імпульсний відгук некогерентної оптичної системи дорівнює квадрату імпульсного відгуку когерентної оптичної системи,

то має існувати зв'язок між ОПФ і КПФ. Встановимо його. За визначенням виразу (4.37) ОПФ знаходять як

$$G_n(v_x, v_y) = \frac{F\{|h_n(x_i, y_i)|^2\}}{\iint_{-\infty}^{\infty} |h_n(x_i, y_i)|^2 dx_i dy_i}. \quad (4.46)$$

Використовуючи теорему автокореляції для перетворення Фур'є [8], перетворимо чисельник останнього виразу до вигляду

$$F\{|h_n(x_i, y_i)|^2\} = \iint_{-\infty}^{\infty} H(v'_x, v'_y) H^*(v'_x - v_x, v'_y - v_y) dv'_x dv'_y. \quad (4.47)$$

Використовуючи теорему Парсеваля для перетворення Фур'є [6], перетворимо знаменник виразу (4.46) до вигляду

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |h_n(x_i, y_i)|^2 dx_i dy_i = \iint_{-\infty}^{\infty} |H(v'_x, v'_y)|^2 dv'_x dv'_y. \quad (4.48)$$

Після підстановки співвідношень (4.47) і (4.48) у вираз (4.46) отримуємо зв'язок між ОПФ і КПФ:

$$G_n(v_x, v_y) = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} H(v'_x, v'_y) H^*(v'_x - v_x, v'_y - v_y) dv'_x dv'_y}{\iint_{-\infty}^{\infty} |H(v'_x, v'_y)|^2 dv'_x dv'_y}. \quad (4.49)$$

Слід зазначити, що вираз (4.49) справедливий як для дифракційно обмежених некогерентних оптичних систем, так і для систем, що мають аберації.

Для дифракційно обмежених когерентних оптичних систем їх КПФ визначають функцією вхідної зіниці (4.23); після підстановки її у вираз (4.49) отримаємо ОПФ таких систем:

$$G_n(v_x, v_y) = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} P(\xi', \eta') P(\xi' - \lambda a' v_x, \eta' - \lambda a' v_y) d\xi' d\eta'}{\iint_{-\infty}^{\infty} P(\xi', \eta') d\xi' d\eta'}. \quad (4.50)$$

У знаменнику зроблено заміну $P^2 = P$, оскільки функція $P(\xi', \eta')$ дорівнює або одиниці, або нулю.

Отриманий вираз (4.50) допускає надзвичайно важливу інтерпретацію. Чисельник являє собою площу A_{cr} області перекриття двох зміщених вихідних зіниць, центр однієї з яких міститься у точці $O_1 (\xi'_1 = 0, \eta'_1 = 0)$, а центр другої – у точці $O_2 (\xi'_1 = \lambda a' v_x, \eta'_1 = \lambda a' v_y)$. Знаменник визначає повну площу A_p вхідної зіниці, тому ОПФ можна розглядати як відносну площу перекриття вихідної зіниці, тобто

$$G_n(v_x, v_y) = \frac{\text{Площа перекриття}}{\text{Повна площа}} = \frac{A_{cr}}{A_p}. \quad (4.51)$$

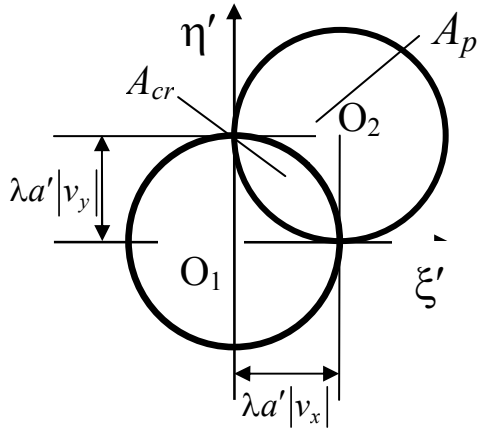


Рис. 4.7. Геометричне пояснення ОПФ дифракційно обмеженої оптичної системи

Геометричне пояснення ОПФ (рис. 4.7) дає змогу у деяких випадках значно спростити обчислення. Для вихідної зіниці простої форми зазвичай легко знайти загальний вираз для площі перекриття A_{cr} . Крім того, з виразу (4.51) видно, що ОПФ дифракційно обмежених систем є дійсними і додатними функціями, тобто

$$G_n(v_x, v_y) = M(v_x, v_y).$$

Розглянемо два приклади визначення ОПФ дифракційно обмежених систем з прямокутною і круглою вихідними зіницями. Функції зіниці таких систем визначаються співвідношеннями (4.25) і (4.26).

Область перекриття прямокутної вихідної зіниці зображено на рис. 4.8, а, площа її

$$A_{cr} = \begin{cases} (a - \lambda a' |v_x|)(b - \lambda a' |v_y|), & \text{коли } |v_x| \leq \frac{a}{\lambda a'}, |v_y| \leq \frac{b}{\lambda a'}; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (4.52)$$

Після нормування на повну площу $A_p = ab$ маємо

$$G_n(v_x, v_y) = \frac{A_{cr}}{A_p} = \begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda a'}{a} |v_x|\right) \left(1 - \frac{\lambda a'}{b} |v_y|\right), & \text{коли } |v_x| \leq \frac{a}{\lambda a'}, |v_y| \leq \frac{b}{\lambda a'}; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (4.53)$$

Графіки функції (4.53) показано на рис. 4.8, б. Граничну просторову частоту, яку пропускає така система, можна визначити як

$$|v_{x,max}| = \frac{a}{\lambda a'}, |v_{y,max}| = \frac{b}{\lambda a'}. \quad (4.54)$$

Оптичну передавальну функцію для круглої вихідної зіниці розрахувати складніше. Оскільки ОПФ такої системи буде вісесиметричною, то достатньо обчислити значення G_n уздовж додатної осі $v_x = v_r$ (рис. 4.9, а). Геометричний розрахунок дає такий результат (див. приклад 4.2):

$$G_n(v_r) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\arccos\left(\frac{\lambda a' v_r}{2R_p}\right) - \frac{\lambda a' v_r}{2R_p} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda a' v_r}{2R_p}\right)^2} \right], & \text{коли } 0 \leq v_r \leq \frac{2R_p}{\lambda a'}; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (4.55)$$

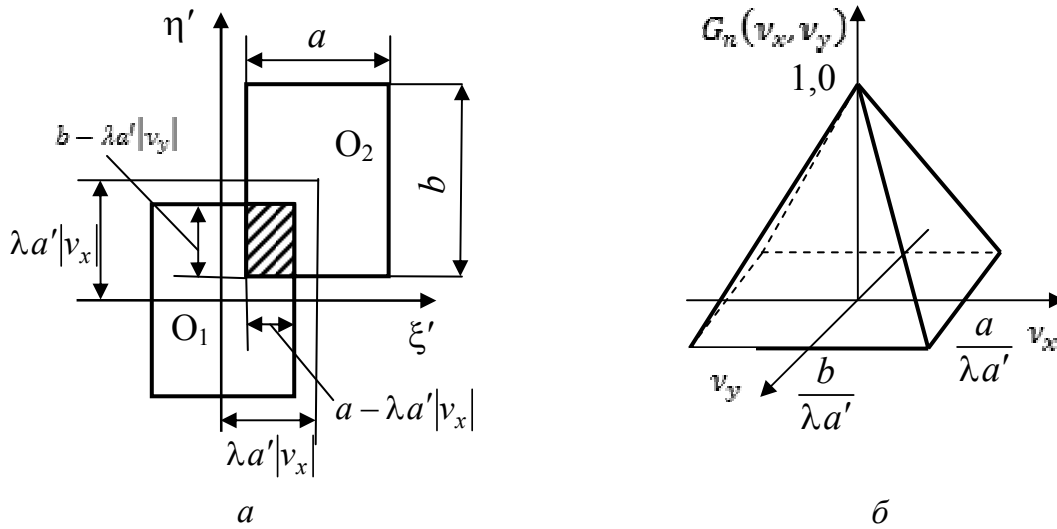


Рис. 4.8. Оптична передавальна функція системи з прямокутною вихідною зіницею:
 а – до розрахунку області перекриття; б – вигляд функції

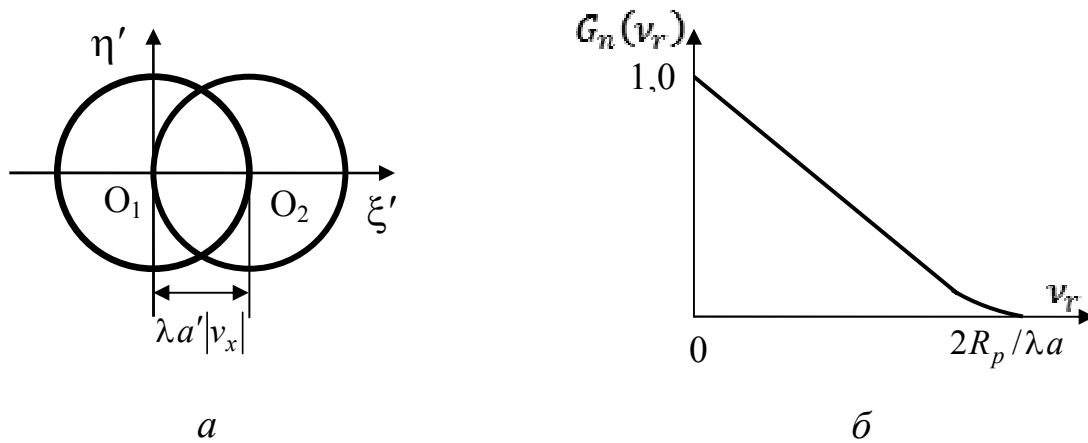


Рис. 4.9. Оптична передавальна функція системи з круглою вихідною зіницею:
 а – до визначення області перекриття; б – вигляд одновимірної функції

Область перекриття круглої вихідної зіниці та ОПФ (4.55) зображено на рис. 4.9. Граничну просторову частоту такої системи визначають як

$$v_{r,max} = \frac{2R_p}{\lambda a'} \quad (4.56)$$

Слід також зазначити, що гранична просторова частота дифракційно обмежених некогерентних оптичних систем (4.54) або (4.56) у два рази перевищує граничну просторову частоту когерентної системи (4.29).

4.5. Приклади розрахунку передавальних функцій оптичних систем

Приклад 4.1. Доведіть, що якщо ФРТ об'єктива апроксимується функцією

$$|h_o(x_i, y_i)|^2 = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi x_i}{2x_o}\right) \cos\left(\frac{\pi y_i}{2y_o}\right), & \text{коли } |x_i| \leq x_o, |y_i| \leq y_o; \\ 0, & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

то його ОПФ має вигляд

$$G_o(v_x, v_y) = \frac{\cos(2\pi x_o v_x) \cos(2\pi y_o v_y)}{1 - 16x_o^2 v_x^2 \quad 1 - 16y_o^2 v_y^2}.$$

Розв'язання. Для визначення ОПФ об'єктива скористаємося формулою (4.34). Підставимо у вираз (4.37) ФРТ об'єктива $|h_o(x_i, y_i)|^2$:

$$G_o(v_x, v_y) = \frac{\int_{-x_o}^{x_o} \int_{-y_o}^{y_o} \cos\left(\frac{\pi x_i}{2x_o}\right) \cos\left(\frac{\pi y_i}{2y_o}\right) \exp[-j2\pi(v_x x_i + v_y y_i)] dx_i dy_i}{\int_{-x_o}^{x_o} \int_{-y_o}^{y_o} \cos\left(\frac{\pi x_i}{2x_o}\right) \cos\left(\frac{\pi y_i}{2y_o}\right) dx_i dy_i} = \frac{I_1}{I_2}. \quad (4.57)$$

Оскільки під інтегралами у виразі (4.57) містяться функції зі змінними, що розділяються, то перейдемо у цьому виразі від двократних інтегралів до однократних:

$$I_1 = \int_{-x_o}^{x_o} \cos\left(\frac{\pi x_i}{2x_o}\right) \exp(-j2\pi v_x x_i) dx_i \int_{-y_o}^{y_o} \cos\left(\frac{\pi y_i}{2y_o}\right) \exp(-j2\pi v_y y_i) dy_i = I_{1x} I_{1y}$$

$$I_2 = \int_{-x_o}^{x_o} \cos\left(\frac{\pi x_i}{2x_o}\right) dx_i \int_{-y_o}^{y_o} \cos\left(\frac{\pi y_i}{2y_o}\right) dy_i = I_{2x} I_{2y}.$$

Для розрахунку цих інтегралів скористаємося табличним інтегралом 1.5.50.11 із довідника [3]:

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx). \quad (4.58)$$

Для інтеграла I_{1x} замінімо змінні: $x = x_i$; $a = -j2\pi v_x$; $b = \frac{\pi}{2x_o}$,

тоді

$$\begin{aligned} I_{1x} &= \frac{\exp(-2\pi v_x x_o)}{\frac{\pi^2}{4x_o^2} - 4\pi^2 v_x^2} \left[(-j2\pi v_x) \cos\left(\frac{\pi x_i}{2x_o}\right) + \frac{\pi}{2x_o} \sin\left(\frac{\pi x_i}{2x_o}\right) \right] \Bigg|_{-x_o}^{x_o} = \\ &= 4x_o^2 \frac{\exp(-j2\pi v_x x_o)}{\pi^2 - 16\pi^2 x_o^2 v_x^2} \left[\frac{\pi}{2x_o} \right] - 4x_o^2 \frac{\exp(j2\pi v_x x_o)}{\pi^2 - 16\pi^2 x_o^2 v_x^2} \left[-\frac{\pi}{2x_o} \right] = 4\pi x_o \frac{\cos(2\pi v_x x_o)}{\pi^2 - 16\pi^2 x_o^2 v_x^2}. \end{aligned}$$

Аналогічно для інтеграла I_{1y} маємо:

$$I_{1y} = 4\pi y_0 \frac{\cos(2\pi v_y y_0)}{\pi^2 - 16\pi^2 y_0^2 v_y^2}.$$

Для інтеграла I_{2x} в (4.58) $a = 0$. Тоді $I_{2x} = \frac{4x_0}{\pi}$. Аналогічно $I_{2y} = \frac{4y_0}{\pi}$.

Після підстановки отриманих інтегралів у вираз (4.57) маємо:

$$G_0(v_x, v_y) = \frac{\cos(2\pi v_x x_0)}{1 - 16x_0^2 v_x^2} \frac{\cos(2\pi v_y y_0)}{1 - 16y_0^2 v_y^2}.$$

Приклад 4.2. Знайдіть ОПФ дифракційно обмеженої оптичної системи з круглою вихідною зіницею діаметром D_p .

Розв'язання. Для визначення ОПФ дифракційно обмеженої оптичної системи використаємо формулу (4.51), де $A_p = \pi D_p^2/4$ – площа вихідної зіниці.

Для круглої вихідної зіниці ОПФ системи матиме вісесиметричний вигляд. Тому будемо розглядати площу перекриття A_{gr} за умови зміщення двох зіниць уздовж осі ξ' на величину $\lambda a' v_r$ (рис. 4.10). Із рис. 4.10 маємо, що площа перекриття складається із двох однакових сегментів A_{AMB} та A_{ANB} . Площу кожного сегмента знаходять за формулою

$$A_{AMB} = A_{ANB} = \frac{D_p^2}{8} (\alpha - \sin\alpha), \quad (4.59)$$

де кут $\alpha = \angle AO_1B = \angle AO_2B$ виражається в радіанах.

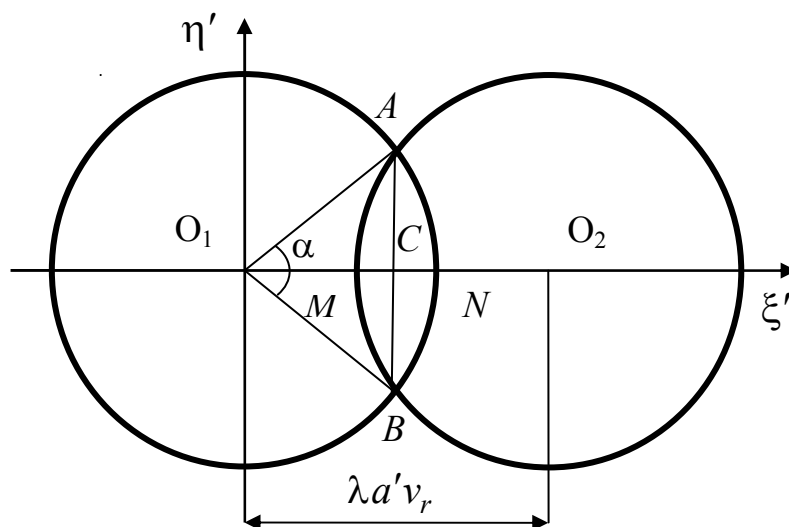


Рис. 4.10. До прикладу 4.2

Із рис. 4.10 знаходимо, що $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{O_1 C}{O_1 A} = \frac{\lambda a' v_r}{D_p}$,

звідки $\alpha = 2 \arccos \left(\frac{\lambda a' v_r}{D_p} \right)$.

Тоді формулу (4.59) подамо у вигляді

$$\begin{aligned} A_{AMB} &= \frac{D_p^2}{8} \left[2 \arccos \left(\frac{\lambda a' v_r}{D_p} \right) - \sin 2 \arccos \left(\frac{\lambda a' v_r}{D_p} \right) \right] = \\ &= \frac{D_p^2}{8} \left[2 \arccos \left(\frac{\lambda a' v_r}{D_p} \right) - 2 \cos \arccos \left(\frac{\lambda a' v_r}{D_p} \right) \sin \arccos \left(\frac{\lambda a' v_r}{D_p} \right) \right] = \\ &= \frac{D_p^2}{4} \left[\arccos \left(\frac{\lambda a' v_r}{D_p} \right) - \left(\frac{\lambda a' v_r}{D_p} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda a' v_r}{D_p} \right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.60)$$

У формулі (4.60) величина $\lambda a' v_r$ має обмеження $\lambda a' v_r \leq D_p$. Якщо $\lambda a' v_r \geq D_p$, то $A_{cr} = 0$.

Після підстановки формули (4.60) у вираз (4.51) отримаємо ОПФ розглядуваної системи:

$$\begin{aligned} G_n(v_x, v_y) &= \frac{A_{cr}}{A_p} = \frac{2A_{AMB}}{A_p} = \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\arccos \left(\frac{\lambda a' v_r}{D_p} \right) - \frac{\lambda a' v_r}{D_p} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda a' v_r}{D_p} \right)^2} \right], & \text{коли } 0 \leq v_r \leq \frac{D_p}{\lambda a'}, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Приклад 4.3. Некогерентна оптична система має вихідну зіницю у вигляді двох симетрично розміщених квадратів (рис. 4.11). Розрахуйте ОПФ такої системи.

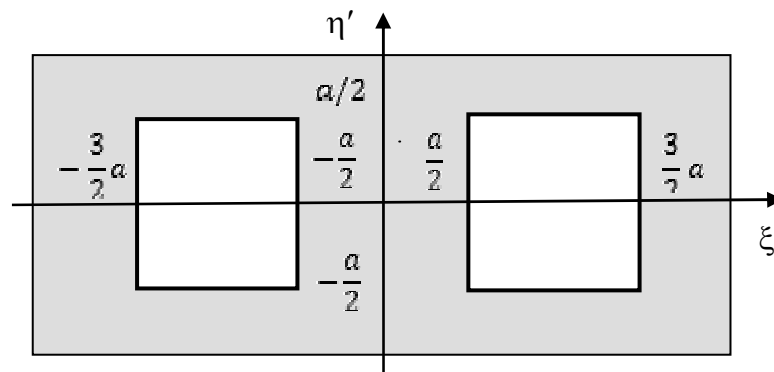


Рис. 4.11. До прикладу 4.3

Розв'язання. Для визначення ОПФ дифракційно обмеженої оптичної системи використаємо формулу (4.51), де $A_p = 2a^2$ – площа вихідної зіниці. Щоб знайти площу перекриття A_{cr} розглянемо три випадки, коли зміщення вхідної зіниці становить:

- 1) $0 \leq \lambda a' |v_x| \leq a$; $0 \leq \lambda a' |v_y| \leq a$;
- 2) $a \leq \lambda a' |v_x| \leq 2a$; $0 \leq \lambda a' |v_y| \leq a$;
- 3) $2a \leq \lambda a' |v_x| \leq 3a$; $0 \leq \lambda a' |v_y| \leq a$.

1. Аналогічно п. 4.4.2 згідно з формулою (4.53) маємо

$$G_{n1}(v_x, v_y) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda a'}{a} |v_x|\right) \left(1 - \frac{\lambda a'}{a} |v_y|\right), & \text{коли } |v_x| \leq \frac{a}{\lambda a'}, |v_y| \leq \frac{a}{\lambda a'}; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (4.62)$$

2. Розглянемо рис. 4.12. У цьому випадку утворюється тільки одна площа перекриття, яка, згідно з формулою (4.52),

$$A_{cr} = \begin{cases} (\lambda a' |v_x| - a)(a - \lambda a' |v_y|), & \text{коли } \frac{a}{\lambda a'} \leq |v_x| \leq \frac{2a}{\lambda a'}, |v_y| \leq \frac{a}{\lambda a'}; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (4.63)$$

Функція (4.63) досягає свого максимального значення a^2 , коли $\lambda a' |v_x| = 2a$, $\lambda a' |v_y| = 0$. Тоді ОПФ системи згідно з виразом (4.51)

$$G_{n2}(v_x, v_y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda a'}{a} |v_x| - 1\right) \left(1 - \frac{\lambda a'}{a} |v_y|\right), & \text{коли } \frac{a}{\lambda a'} \leq |v_x| \leq \frac{2a}{\lambda a'}, |v_y| \leq \frac{a}{\lambda a'}; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (4.64)$$

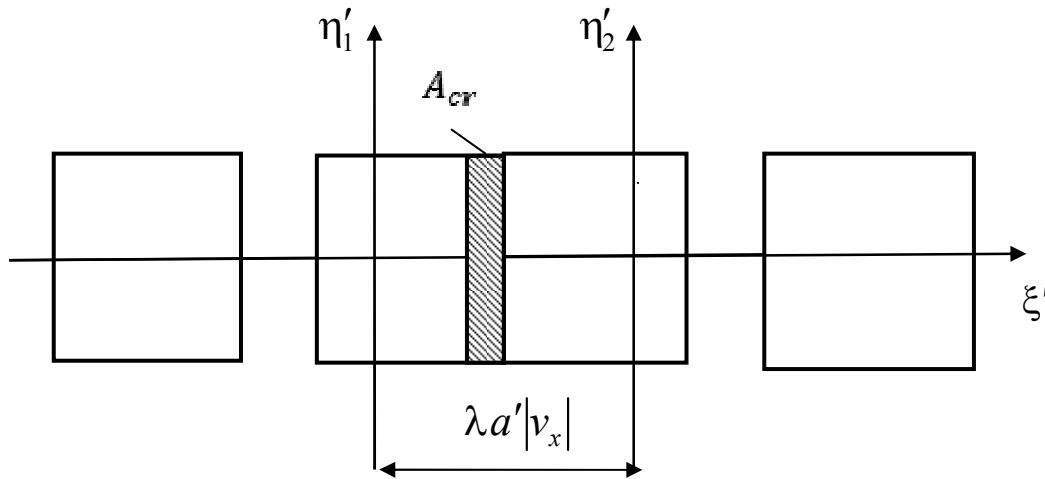


Рис. 4.12. До прикладу 4.3: визначення площі перекриття A_{cr} , коли зміщення вхідної зіниці становить

$$a \leq \lambda a' |v_x| \leq 2a; \quad \lambda a' |v_y| = 0$$

3. Розглянемо рис. 4.13. У цьому випадку також утворюється тільки одна площа перекриття, яка, згідно з формулою (4.52),

$$A_{cr} = \begin{cases} (3a - \lambda a' |v_x|)(a - \lambda a' |v_y|), & \text{коли } \frac{2a}{\lambda a'} \leq |v_x| \leq \frac{3a}{\lambda a'}, |v_y| \leq \frac{a}{\lambda a'}; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (4.65)$$

Функція (4.65) досягає свого максимального значення a^2 , коли $\lambda a' |v_x| = 2a$, $\lambda a' |v_y| = 0$, і дорівнює нулю, коли $\lambda a' |v_x| = 3a$. Тоді ОПФ системи згідно з виразом (4.51)

$$G_{нз}(v_x, v_y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(3 - \frac{\lambda a'}{a} |v_x| \right) \left(1 - \frac{\lambda a'}{a} |v_y| \right), & \text{коли } \frac{2a}{\lambda a'} \leq |v_x| \leq \frac{3a}{\lambda a'}, |v_y| \leq \frac{a}{\lambda a'}; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (4.66)$$

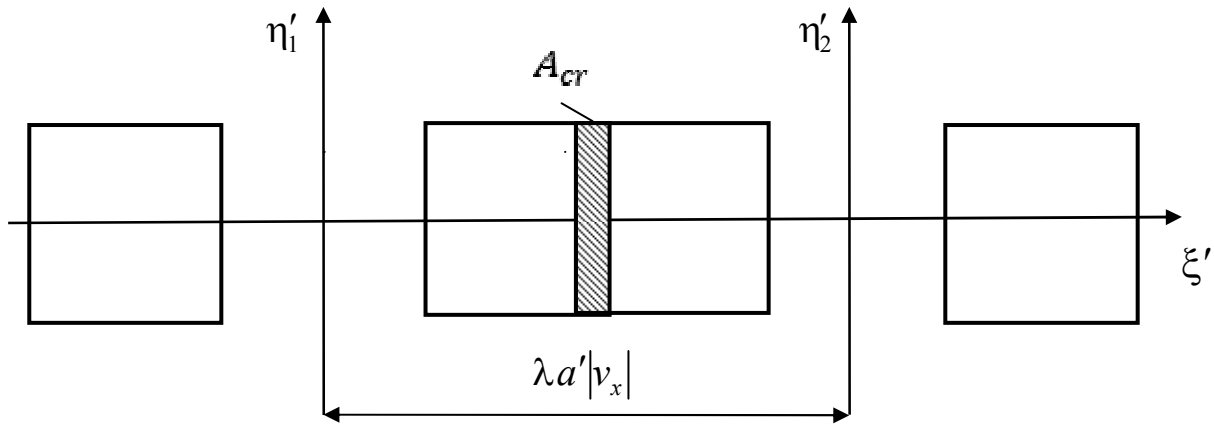


Рис. 4.13. До прикладу 4.3: визначення площі перекриття A_{cr} ,

коли зміщення вхідної зіниці становить

$$a - 2a \leq \lambda a' |v_x| \leq 3a, \lambda a' |v_y| = 0$$

Отже, загальна ОПФ системи з урахування виразів (4.62), (4.64) та (4.66) описується функцією

$$G_n(v_x, v_y) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda a'}{a} |v_x| \right) \left(1 - \frac{\lambda a'}{a} |v_y| \right), & \text{коли } |v_x| \leq \frac{a}{\lambda a'}, |v_y| \leq \frac{a}{\lambda a'}; \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda a'}{a} |v_x| - 1 \right) \left(1 - \frac{\lambda a'}{a} |v_y| \right), & \text{коли } \frac{a}{\lambda a'} \leq |v_x| \leq \frac{2a}{\lambda a'}, |v_y| \leq \frac{a}{\lambda a'}; \\ \frac{1}{2} \left(3 - \frac{\lambda a'}{a} |v_x| \right) \left(1 - \frac{\lambda a'}{a} |v_y| \right), & \text{коли } \frac{2a}{\lambda a'} \leq |v_x| \leq \frac{3a}{\lambda a'}, |v_y| \leq \frac{a}{\lambda a'}; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

4.6. Задачі для самостійного розв'язання

Задача 4.1. Некогерентна дифракційно обмежена оптична система має вихідну зіницю у вигляді квадрата зі стороною l . Квадратний екран зі стороною $l/2$ встановлений у центрі зіниці (рис. 4.14). Побудуйте графік одновимірної ОПФ для випадків, коли екран є і його немає, якщо $l = 50$ мм, $a' = 100$ мм, $\lambda = 0,5$ мкм.

Відповідь:

$$G_{n1}(v_x, 0) = \begin{cases} 1 - 2 \frac{\lambda a'}{l} |v_x|, & \text{коли } 0 \leq |v_x| \leq \frac{l}{4\lambda a'}; \\ \frac{2}{3} \left(1 - \frac{\lambda a'}{l} |v_x| \right), & \text{коли } \frac{l}{4\lambda a'} \leq |v_x| \leq \frac{l}{2\lambda a'}; \\ \frac{1}{3}, & \text{коли } \frac{l}{2\lambda a'} \leq |v_x| \leq \frac{3l}{4\lambda a'}; \\ \frac{4}{3} \left(1 - \frac{\lambda a'}{l} |v_x| \right), & \text{коли } \frac{3l}{4\lambda a'} \leq |v_x| \leq \frac{l}{\lambda a'}; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

$$G_{n2}(v_x, v_y) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\lambda a'}{l} |v_x| \right) \left(1 - \frac{\lambda a'}{l} |v_y| \right), & \text{коли } |v_x| \leq \frac{l}{\lambda a'}, |v_y| \leq \frac{l}{\lambda a'}; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Задача 4.2. Некогерентна оптична система має вихідну зіницю у вигляді двох симетрично розміщених прямокутників (рис. 4.15). Розрахуйте ОПФ такої системи і побудуйте її графік.

Вказівка: Скористайтесь прикладом 4.3.

Відповідь:

$$G_n(v_x, v_y) = \begin{cases} 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda a'}{b} |v_x| \right) \left(1 - \frac{\lambda a'}{b} |v_y| \right), & \text{коли } |v_x| \leq \frac{b}{2\lambda a'}, |v_y| \leq \frac{b}{\lambda a'}; \\ 0, & \text{коли } \frac{b}{2\lambda a'} \leq |v_x| \leq \frac{b}{\lambda a'}, |v_y| \leq \frac{b}{\lambda a'}; \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda a'}{b} |v_x| - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{\lambda a'}{b} |v_y| \right), & \text{коли } \frac{b}{2\lambda a'} \leq |v_x| \leq \frac{3b}{2\lambda a'}, |v_y| \leq \frac{b}{\lambda a'}; \\ \left(2 - \frac{\lambda a'}{a} |v_x| \right) \left(1 - \frac{\lambda a'}{a} |v_y| \right), & \text{коли } \frac{3b}{2\lambda a'} \leq |v_x| \leq \frac{2b}{\lambda a'}, |v_y| \leq \frac{b}{\lambda a'}; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Задача 4.3. Некогерентна оптична система має вихідну круглу зіницю діаметром D_p . Діафрагма у вигляді півплощини розміщена у вихідній зіниці (рис. 4.16). Знайдіть вираз для ОПФ уздовж осей v_x та v_y , коли є екран і коли його немає. Побудуйте графіки цих функцій, якщо $D_p = 10$ мм, $a' = 50$ мм, $\lambda = 0,5$ мкм.

Вказівка: Скористайтесь прикладом 4.2.

Відповідь:

$$G_1(v_x, 0) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\arccos\left(\frac{\lambda a' v_x}{D_p}\right) - \frac{\lambda a' v_x}{D_p} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda a' v_x}{D_p}\right)^2} \right], & \text{коли } |v_x| \leq \frac{D_p}{\lambda a'}, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

$$G_1(0, v_y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\arccos\left(\frac{2\lambda a' v_y}{D_p}\right) - \frac{2\lambda a' v_y}{D_p} \sqrt{1 - \left(\frac{2\lambda a' v_y}{D_p}\right)^2} \right], & \text{коли } 0 \leq |v_y| \leq \frac{D_p}{2\lambda a'}, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

$$G_2(v_x) = G_2(v_y) = G_2(v_r) =$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\arccos\left(\frac{\lambda a' v_r}{D_p}\right) - \frac{\lambda a' v_r}{D_p} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda a' v_r}{D_p}\right)^2} \right], & \text{коли } v_r \leq \frac{D_p}{\lambda a'}, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

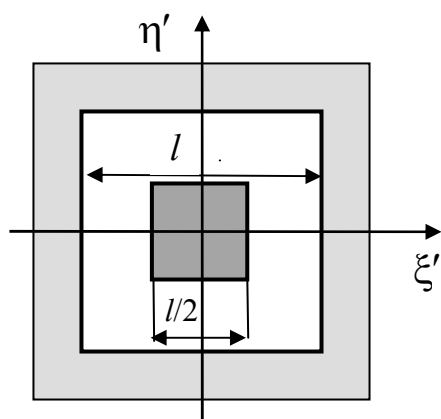


Рис. 4.14. До задачі 4.1

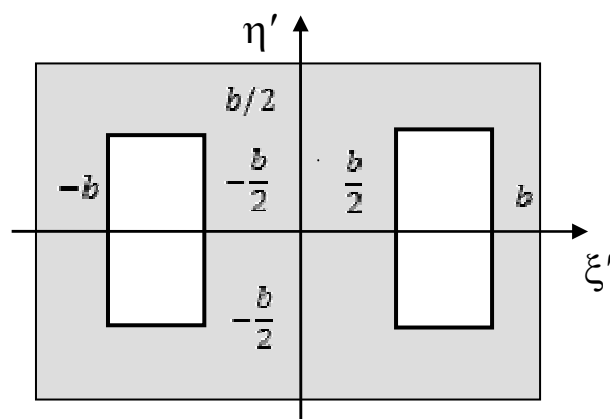


Рис. 4.15. До задачі 4.2

Задача 4.4. Вихідна зіниця некогерентної оптичної системи має форму кільця з радіусами R_{p1} і R_{p2} . Визначте ОПФ такої системи і побудуйте її графік.

$$\text{Відповідь: } G(v_r) = \frac{z}{\pi} \left\{ \left[\arccos\left(\frac{\lambda a' v_r}{2R_{p1}}\right) - \frac{\lambda a' v_r}{2R_{p1}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda a' v_r}{2R_{p1}}\right)^2} \right] - \right. \\ \left. - \left[\arccos\left(\frac{\lambda a' v_r}{2R_{p1}}\right) - \frac{\lambda a' v_r}{2R_{p1}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda a' v_r}{2R_{p1}}\right)^2} \right] \right\}, \text{ коли } 0 \leq v_r \leq \frac{D_p}{\lambda a'}.$$

Задача 4.5. Зображення предмета з амплітудним коефіцієнтом пропускання у вигляді прямокутної ґратки (рис. 4.17) формується лінзою з круглою вихідною зіницею. Фокусна відстань лінзи $f = 10$ см, частота першої гармоніки прямокутної ґратки $v_{x1} = 1000 \text{ см}^{-1}$, відстань до предмета $a = -20$ см, довжина хвилі $\lambda = 0,5$ мкм. Знайдіть мінімальний діаметр лінзи, за якого буде ще помітно деяке зменшення інтенсивності у площині зображення для випадків когерентного і некогерентного освітлення предмета.

$$\text{Відповідь: } D_{p,min1} = 2\lambda a' v_{x1} = 20 \text{ мм}, D_{p,min2} = \lambda a' v_{x1} = 10 \text{ мм}.$$

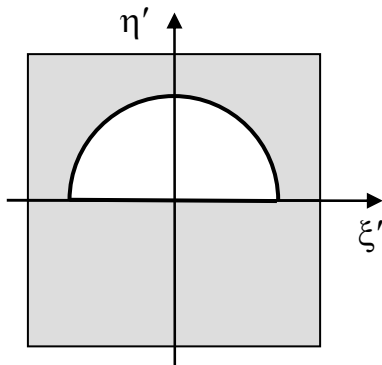


Рис. 4.16. До задачі 4.3

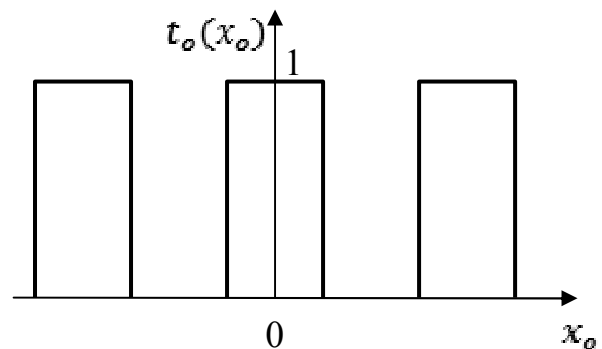


Рис. 4.17. До задачі 4.5

Задача 4.6. Синусоїдальний тест-об'єкт з амплітудним коефіцієнтом пропускання $t_o(x_o, y_o) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi v_{x0} x_o)$ встановлено перед когерентною оптичною системою. Знайдіть розподіл інтенсивності в зображенні для системи, в якій немає аберації. Покажіть, що такий розподіл інтенсивності буде в нескінченній кількості площин простору зображень, які не відповідають площині фокусування.

$$\text{Відповідь: } I(x_i, y_i) = \frac{1}{4} I_0 \delta(y_i) \left[\delta(x_i) + \frac{1}{4} \delta(x_i - \lambda f v_{x0}) + \frac{1}{4} \delta(x_i + \lambda f v_{x0}) \right].$$

Задача 4.7*. Синусоїдальну амплітудну ґратку з коефіцієнтом пропускання $t_o(x_o, y_o) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi\nu_{x0}x_o)$ встановлено перед круглою додатною лінзою з діаметром D_p та фокусною відстанню f , вона освітлюється плоскою монохроматичною хвилею, що поширюється під кутом θ у площині x_oz (рис. 4.18).

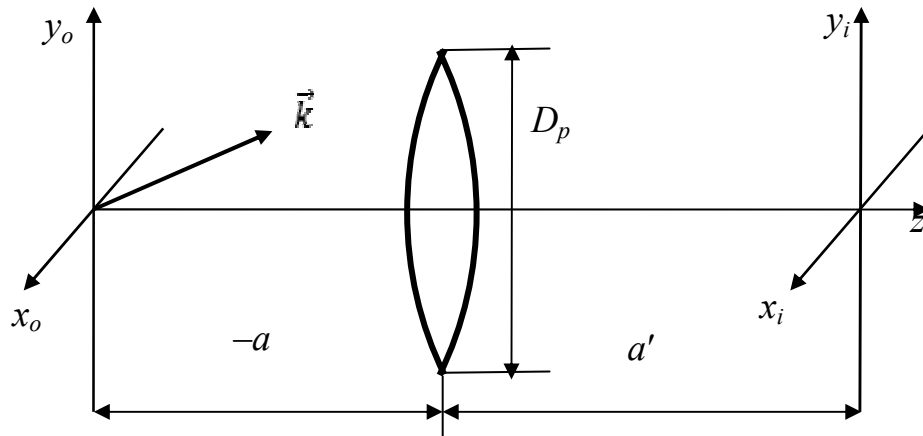


Рис. 4.18. До задачі 4.8

Знайдіть просторовий спектр розподілу амплітуди світлового поля безпосередньо за ґраткою. Для випадку, коли $-a = a' = 2f$, визначте максимальний кут θ , для якого у площині зображення буде помітна деяка зміна інтенсивності. Вважаючи, що максимальний кут θ відомий, визначте розподіл інтенсивності у площині зображення і порівняйте його з відповідним розподілом за $\theta = 0$. Вважаючи, що кут θ набуває максимального значення, знайдіть максимальну частоту ν_{x0} , за якої зміна інтенсивності спостерігатиметься у площині зображення. Порівняйте цю частоту з граничною частотою за $\theta = 0$.

Відповідь:

$$\tilde{t}_o(\nu_x, \nu_y) = F\{t_o(x_o, y_o)\} = \delta(\nu_y) \frac{1}{2} \left[\delta(\nu_x) + \frac{1}{2} \delta(\nu_x - \nu_{x0}) + \frac{1}{2} \delta(\nu_x + \nu_{x0}) \right].$$

Задача 4.8. Вихідна зіниця оптичної некогерентної системи має форму, зображену на рис. 4.19. Знайдіть переріз ОПФ площинами $\nu_x = 0$ та $\nu_y = 0$ і визначте значення граничних просторових частот.

Відповідь:

$$G(v_x, 0) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\arccos\left(\frac{\lambda a' v_x}{2R_p}\right) - \frac{\lambda a' v_x}{D_p} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda a' v_x}{2R_p}\right)^2} \right], & \text{коли } |v_x| \leq \frac{2R_p}{\lambda a'}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

$$G(0, v_y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\arccos\left(\frac{\lambda a' v_y}{2R_p}\right) - \frac{\lambda a' v_y}{2R_p} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda a' v_y}{2R_p}\right)^2} \right], & \text{коли } 0 \leq |v_y| \leq \frac{2R_p}{\lambda a'}; \\ \frac{1}{\pi} \left[\arccos\left(\frac{4R_p - \lambda a' v_y}{2R_p}\right) - \frac{4R_p - \lambda a' v_y}{2R_p} \sqrt{1 - \left(\frac{4R_p - \lambda a' v_y}{2R_p}\right)^2} \right], & \text{коли } \frac{2R_p}{\lambda a'} \leq |v_y| \leq \frac{4R_p}{\lambda a'}; \\ \frac{1}{\pi} \left[\arccos\left(\frac{\lambda a' v_y - 4R_p}{2R_p}\right) - \frac{\lambda a' v_y - 4R_p}{2R_p} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda a' v_y - 4R_p}{2R_p}\right)^2} \right], & \text{коли } \frac{4R_p}{\lambda a'} \leq |v_y| \leq \frac{6R_p}{\lambda a'}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

$$v_{x,max} = \frac{2R_p}{\lambda a'}, \quad v_{y,max} = \frac{6R_p}{\lambda a'}.$$

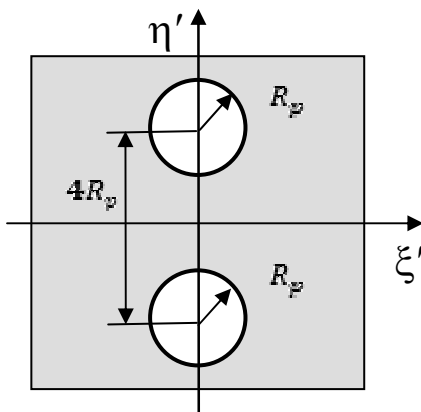


Рис. 4.19. До задачі 4.8

Задача 4.9. Величину аберацій некогерентної системи зручно характеризувати фактором (числом) Штреля D_{sh} , який визначається як відношення інтенсивності світла в максимумі зображення точкового джерела (імпульсного відгуку) до максимуму інтенсивності в зображення точкового джерела тієї ж системи коли немає аберацій.

Доведіть, що число Штреля дорівнює нормованій площі під ОПФ системи з абераціями $G_{n,ab}(v_x, v_y)$:

$$D_{sh} = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} G_{n,ab}(v_x, v_y) dv_x dv_y}{\iint_{-\infty}^{\infty} G_{n,d-l}(v_x, v_y) dv_x dv_y},$$

де $G_{n,d-l}(v_x, v_y)$ – ОПФ дифракційно обмеженої системи.

Задача 4.10. Функція розсіювання некогерентної системи являє собою кружок радіусом r_o з рівномірним розподілом освітленості. Визначте ОПФ такої системи.

Відповідь: $G_o(v_r) = \frac{2J_1(2\pi r_o v_r)}{2\pi r_o v_r}.$

Задача 4.11. Знайдіть ОПФ і побудуйте її графік для об'єктива з косинус-квадратичною апроксимацією ФРТ, яка має вигляд

$$|h_o(x_i, y_i)|^2 = \begin{cases} h_o^2 \cos^2\left(\frac{\pi x_i}{2 r_o}\right) \cos^2\left(\frac{\pi y_i}{2 r_o}\right), & \text{коли } |x_i| \leq r_o, |y_i| \leq r_o; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Вказівка: Скористайтесь табличним інтегралом

$$\int e^{ax} \cos^2 bx dx = \frac{e^{ax}}{2a} + \frac{e^{ax}}{a^2 + 4b^2} \left(\frac{a}{2} \cos 2bx + b \sin 2bx \right).$$

Відповідь: $G_o(v_x, v_y) = \frac{\text{sinc}(2r_o v_x) \text{sinc}(2r_o v_y)}{1 - 4r_o^2 v_x^2} \frac{\text{sinc}(2r_o v_y)}{1 - 4r_o^2 v_y^2}.$

Задача 4.12. Знайдіть ОПФ і побудуйте її графік для об'єктива, ФРТ якого має вигляд

$$|h_o(x_i, y_i)|^2 = \frac{1}{\pi r_o^2} \exp\left(-\frac{x_i^2 + y_i^2}{2r_o^2}\right).$$

Відповідь: $G_o(v_r) = \exp[-2\pi^2 r_o^2 (v_x^2 + v_y^2)].$

Задача 4.13. Визначте ОПФ циліндричної лінзи, в якій немає абераций.

Відповідь: $G_n(v_x, v_y) = \begin{cases} 1 - \frac{\lambda f_x'}{a} |v_x|, & \text{коли } |v_x| \leq \frac{a}{\lambda f_x'}; \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$

Задача 4.14*. Функція розсіювання об'єктива з виправленими аберациями визначається дифракційним розсіюванням:

$$|h_o(r_i)|^2 = \left[\frac{2J_1\left(\frac{\pi D_p r_i}{\lambda f}\right)}{\frac{\pi D_p r_i}{\lambda f}} \right]^2,$$

де J_1 – функція Бесселя першого роду першого порядку; D_p – діаметр вихідної зіниці; f – задня фокусна відстань; λ – довжина хвилі.

Доведіть, що ОПФ такого об'єктива визначається функцією

$$G_o(v_r) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\arccos\left(\frac{\lambda a' v_r}{D_p}\right) - \frac{\lambda a' v_r}{D_p} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda a' v_r}{D_p}\right)^2} \right], & \text{коли } 0 \leq v_r \leq \frac{D_p}{\lambda a'}; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Физический энциклопедический словарь* / Гл. ред. А. М. Прохоров. – М.: Сов. энциклопедия, 1984. – 944 с.
2. *Борн М. Основы оптики* / М. Борн, Э. Вольф. – М.: Наука, 1973. – 720 с.
3. *Прудников А. П. Интегралы и ряды. Элементарные функции* / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М.: Наука, 1981. – 798 с.
4. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами* / Под ред. М. Абрамовица и И. Стинга; пер. с англ. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
5. *Двайт Г. Б. Таблица интегралов* / Г. Б. Двайт. – М.: Наука, 1973. – 228 с.
6. *Прудников А. П. Специальные функции* / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – М.: Наука, 1983. – 752 с.
7. *Бегунов Б. Н. Теория оптических систем* / Б. Н. Бегунов, Н. П. Заказов, С. И. Кирюшин, В. И. Кузичев. – М.: Машиностроение, 1981. – 432 с.
8. *Колобродов В. Г. Проектування тепловізійних і телевізійних систем спостереження: підруч.* / В. Г. Колобродов, М. І. Лихоліт. – К.: НТУУ «КПІ», 2007. – 364 с. – 500 пр. – ISBN 966-622-230-2.

Навчальне видання

Колобродов Валентин Георгійович
Тимчик Григорій Семенович

Дифракційна теорія оптичних систем

Підручник

Редактор *Н. В. Мурашова*
Комп'ютерна верстка *С. А. Бобров*

Темплан 2010 р., поз. 1-1-002

Підп. до друку 03.03.2011. Формат 60×84¹/₁₆. Папір офс. Гарнітура Times.
Спосіб друку – ризографія. Ум. друк. арк. 8,14. Обл.-вид. арк. 13,53. Наклад 100 пр. Зам. № 11-78.

НТУУ «КПІ» ВПІ ВПК «Політехніка»
Свідоцтво ДК № 1665 від 28.01.2004 р.
03056, Київ, вул. Політехнічна, 14, корп. 15
тел./факс (044) 406-81-78

This image shows a full page of blank, lined paper. It features approximately 28 horizontal grey lines spaced evenly apart, typical of standard notebook paper. The lines extend across the entire width of the page, leaving small margins at the top and bottom. There are no vertical lines, text, or other markings present.

[illegible]